Controlabilidade do rolamento de uma esfera sobre uma superfície de revolução

Laura Maria da Cunha Canto Oliva Biscolla

TESE APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO TÍTULO
DE
DOUTOR EM CIÊNCIAS

Área de Concentração: MATEMÁTICA APLICADA
Orientador: Prof. Dr. Pedro Aladar Tonelli

São Paulo
2005

Controlabilidade do rolamento de uma esfera sobre uma superfície de revolução

Este exemplar corresponde à redação final da tese de doutorado devidamente corrigida e defendida por Laura Maria da Cunha Canto Oliva Biscolla e aprovada pela comissão julgadora.

São Paulo, 22 de dezembro de 2005.

Banca examinadora:

- Prof. Dr. Pedro Aladar Tonelli (Presidente) - IME-USP
- Prof. Dr. Luciano Barbanti - IME-USP
- Prof. Dr. Diego Colón - UNESP
- Prof. Dr. Luiz Antonio Barrera San Martin - IMECC-UNICAMP
- Prof. Dr. Paulo Régis Caron Ruffino - IMECC-UNICAMP

Resumo

O trabalho apresenta inicialmente os conceitos clássicos de rolamento (sem escorregamento e sem pivotamento) de uma superfície sobre outra usando os triedros de Darboux das duas superfícies ao longo das respectivas curvas de contato. Mostra, ainda, a equivalência desses conceitos com outras definições. A seguir, estuda-se a controlabilidade no problema do rolamento de uma esfera sobre uma superfície S de revolução, tanto no caso de rolar sem escorregar como no caso de não escorregar e não pivotar; a controlabilidade visa determinar a atingibilidade entre dois "estados" da esfera (posição em S e orientação), isto é, de elementos do espaço das configurações $S \times SO(3)$. Na seqüência, estabelecem-se condições nos controles para que os rolamentos sem escorregamento e sem pivotamento ocorram sobre geodésicas de S e obtém-se, também, a controlabilidade nesta situação. Finalmente, verifica-se que, quando S é um plano, 3 ou 4 rolamentos retilíneos, sem escorregamento e sem pivotamento, são suficientes para garantir a atingibilidade entre dois "estados" da esfera.

Abstract

This work starts by presenting the classical concepts of rolling (without slipping and without slipping or twisting) of a surface over another one, using the Darboux referential frames of the two surfaces along their contact curves. It shows the equivalence between these concepts with other definitions. In the sequel one studies the controllability in the rolling problem of a ball over a surface of revolution S, including both: the non slipping and the non slipping or twisting cases; controllability aims to determine the reachability between two "states"of the ball (position on S and orientation), that is, two elements of the configuration space $S \times SO(3)$. It follows by establishing conditions on controls in order that the rollings occur along geodesics of S and by studying the controllability in this situation. Finally, it is shown that if S is the plane, 3 or 4 retilinear moves without slipping or twisting are enough to guarantee reachability between two states of the ball.

Ao meu pai, grande incentivador
em todos esses anos.

Agradecimentos

Agraceço inicialmente ao Prof. Dr. Pedro Aladar Tonelli pelo atencioso trabalho de orientação.

Agradeço ao Prof. Dr. Sérgio Muniz Oliva Filho pela atenção dispensada em vários momentos deste trajeto.

Agradeço a todos os amigos do Instituto Superior Técnico de Lisboa que me acolheram na temporada em que estive lá.

Agradeço ao Walter Vicente Fernandes pelo auxílio no trabalho de digitação.

Agradeço também aos colegas Maria do Carmo Pacheco de Toledo Costa, Rita de Cássia Dornelas Sodré Broche e Osnel Broche Cristo, que muito me ajudaram na elaboração do formato final da tese.

Agradeço finalmente a todos os familiares e amigos, em especial ao meu marido, Leonildo, e filhos, Guilherme, Marcelo e Henrique, pelo apoio e carinho que sempre me deram.

Sumário

Introdução **2**

1 Rolamentos de superfícies **8**

1.1 Relações de Darboux 8

1.2 Rolamentos sem escorregamento e sem pivotamento 18

1.3 Rolamento sem escorregamento e sem pivotamento na abordagem de Bryant e Hsu 23

1.4 Condições para que o difeomorfismo entre superfícies paralelas transforme geodésica de uma em geodésica da outra 27

1.5 Rolamentos de subvariedades segundo Sharpe 35

2 Controlabilidade no problema do rolamento de uma esfera sobre uma superfície de revolução **41**

2.1 Sistemas de controle não lineares afins 41

2.2 Condições para não escorregamento e não pivotamento 46

2.3 Ângulos de Euler e o vetor instantâneo de rotação 52

2.4 Sistemas de controle no problema do rolamento 58

2.5 Condições para a verificação da completa não integrabilidade das distribuições $\mathcal{D}$ e $\mathcal{D}_1$ 67

3 Controlabilidade no problema do rolamento de uma esfera sobre geodésicas de uma superfície de revolução **75**

4 Uma solução fraca do problema de Kendall **88**

Introdução

Num artigo de 1983, Hammersley ([9]) analisa o seguinte problema, por ele chamado de problema de Kendall: considera-se uma bola de raio $\delta > 0$ apoiada sobre um plano horizontal. A bola está com orientação, ou seja, existe um referencial ortonormal positivo preso a ela. Cada "estado" da bola é definido pelo ponto do plano onde ela se apóia e pela posição do referencial a ela preso com relação a um referencial ortonormal positivo fixo no espaço. Um movimento da bola é uma rotação com eixo paralelo ao plano descrevendo uma reta nesse plano e de tal modo que não haja escorregamento da bola. O problema de Kendall visa determinar a quantidade N necessária e suficiente de tais movimentos que permita levar a bola de um estado qualquer E_1 para um estado final E_2 sem efetuar pivotamento na bola. Tal problema está resolvido em [9] com uma solução extremamente complexa e de difícil leitura. No capítulo 4 apresentamos uma solução fraca do referido problema.

A maneira geométrica simples de ver o problema de Kendall (plano) permite apresentar essa solução fraca através de dois fatos fundamentais. O fato 2 é extremamente interessante e permite resolver algumas questões por meio de construções geométricas com régua e compasso. Essa apresentação motivará estudos futuros para o mesmo problema quando a esfera rolar sobre algumas superfícies especiais como a esfera, o cone, o cilindro, etc.

O problema do rolamento de uma bola sobre um plano admite uma interpretação em teoria de controle (ver Jurdjevic ([14])). Uma generalização foi lá considerada substituindo-se o plano por uma superfície esférica de raio R e outras generalizações e variações foram também propostas no final de [9].

A consideração desses problemas coloca em evidência a relevância dos métodos e idéias da teoria de controle e da teoria geométrica correspondente. Apresenta de forma simples vários problemas de geometria de sistemas não holônomos, especialmente no que diz respeito à cinemática envolvida.

Quando uma bola rola num plano descrevendo uma reta (geodésica do plano) significa também que a curva de contato na bola é um círculo máximo (geodésica da esfera) e, além disso, o movimento sem escorregamento dá-se, também, sem pivotamento. No intuito de formular de maneira precisa esses conceitos, passamos a considerar, inicialmente, o estudo do rolamento sem escorregamento e sem pivotamento de uma superfície Σ_1 sobre uma outra superfície fixa Σ_2. No capítulo 1, seção 1.3, procuramos exibir algumas definições equivalentes para tais rolamentos sem escorregamento e sem pivotamento e isto ocorre se, e somente se, as duas curvas têm as mesmas curvaturas geodésicas; em particular, se uma das curvas é geodésica em Σ_2, a outra também é geodésica em Σ_1, e reciprocamente. O principal instrumento geométrico utilizado foi a construção dos triedros móveis de Darboux nas duas superfícies ao longo das respectivas curvas de contato.

Mostramos, com um exemplo, que uma esfera que rola num plano sem escorregar e sem pivotar pode descrever curvas de contato que não sejam geodésicas. Porém, Bryant e Hsu (ver [5]) demonstraram que se as duas superfícies têm curvaturas de Gauss distintas existem movimentos sem escorregamento e sem pivotamento que necessariamente implicam que as curvas de contato correspondentes sejam geodésicas nas respectivas superfícies. Entretanto, não abordaremos os detalhes de tal demonstração.

Provamos, também, que uma curva contida numa esfera e que possua curvatura geodésica constante é necessariamente plana (ver proposição 1.9, seção 1.2), logo é um arco de circunferência. Calculamos, ainda, no capítulo 1, seção 1.1, a curvatura geodésica dos paralelos de uma superfície de revolução, desenvolvemos o exemplo do catenóide (superfície de revolução) que é isométrico ao helicóide (superfície regrada) e calculamos as curvaturas geodésicas de algumas curvas especiais que se correspondem isometricamente nas duas superfícies.

R. W. Sharpe (ver[20]) generalizou o estudo dos rolamentos considerando a situação bem geral de uma subvariedade de dimensão $(n-p)$, mergulhada em $\mathbb{R}^n$, que rola sem escorregar e sem pivotar sobre uma outra subvariedade fixa de $\mathbb{R}^n$, também de dimensão $(n-p)$, definindo de maneira apropriada tais conceitos de rolamento e mostrando, inclusive, que dada uma curva suave de contato em uma das subvariedades, existe um único movimento sem escorregamento e sem pivotamento que tem a curva dada como curva de contato. Na seção 1.5 fizemos um resumo de algumas dessas idéias de Sharpe.

No estudo da cinemática e da dinâmica do problema de rolamento de uma esfera sobre uma superfície de revolução, desenvolvido por Hermans [11], surge uma questão de geometria que consiste em considerar duas "superfícies paralelas", a saber, a superfície onde rola a esfera e a superfície descrita pelas posições do seu centro de massa, e ver em que condições as imagens de geodésicas de uma delas são geodésicas da outra. É claro que em planos paralelos ou em esferas paralelas as imagens de geodésicas são geodésicas. Deduzimos com detalhes (ver seção 1.4) as restrições a que devem ser submetidas as geodésicas de uma das superfícies para que suas imagens sejam geodésicas da superfície paralela. Isso tudo surgiu porque Hermans definiu as posições da bola pelo seu centro de massa e não pelo ponto de contato com a superfície.

O capítulo 2 trata da controlabilidade no problema de rolamento de uma esfera