UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS - UFMG
INSTITUTO DE CIENCIAS EXATAS - ICEx
CURSO DE MESTRADO EM MATEMÁTICA

FUNÇÕES DE GREEN E APLICAÇÕES A PROBLEMAS ELÍPTICOS.

Roy Percy Tocto Guarniz

Belo Horizonte - MG
2014

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS - UFMG
CURSO DE MESTRADO EM MATEMÁTICA

Roy Percy Tocto Guarniz
Orientador:

Prof. Emerson Alves Mendonça de Abreu.

FUNÇÕES DE GREEN E APLICAÇÕES A PROBLEMAS ELÍPTICOS.

Dissertação submetida à banca examinadora, designada pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFMG, como requisito parcial para a obtenção do título de mestre em Matemática.

Belo Horizonte - MG
Fevereiro - 2014

Agradecimentos

A minha mãe, pela ajuda e o apoio que sempre depositou em mim.

À Loren, quem apareceu na minha vida por acaso ao mesmo tempo que comecei o curso de mestrado; e quem como o conhecimento adquirido ao longo dos anos vai ficar comigo para sempre

Ao meu orientador Emerson pela confiança desde o primeiro semestre na materia de *Análise no* $\mathbb{R}^N$, e logo pela disposição, paciência e o jeito eficaz de me orientar até a conclusão desta dissertação.

Aos professores que compartilharam os seus conhecimentos nas matérias que cursei:

Lorena, Remy, Emerson, Arturo, Marcelo T., Marcos e Paulo.

Aos colegas Renato, Carlos, José A., José V., Julio, Edwin, Tauan e Victor pelo companheirismo.

À CAPES e REUNI pela bolsa de estudos.

Resumo

Neste trabalho, estudaremos a equação de Laplace no semi-espaço $\mathbb{R}^N_+$ com condição de fronteira não linear supercrítica tipo Robin $\frac{\partial u}{\partial \eta} + \lambda u = u|u|^{\rho-1} + f(x)$ em $\partial\mathbb{R}^N_+ = \mathbb{R}^{N-1}$, onde $N \geq 3$ e $\lambda \geq 0$. A existência da solução $u \in E_{p,q} = D^{1,p}(\mathbb{R}^N_+) \cap L^q(\mathbb{R}^N_+)$ obtém-se pelo argumento do ponto fixo para $f \in L^d(\mathbb{R}^{N-1})$ suficientemente pequena. Os valores para p, q são escolhidos de modo que a norma $\|\cdot\|_{E_{p,q}}$ seja invariante por escalonamento do problema de valores no bordo. A solução u é positiva sempre que $f(x) > 0$ q.t.p. $x \in \mathbb{R}^{N-1}$. Quando f é radial e simétrica, u é invariante por rotações ao redor do eixo $\{x_N = 0\}$. Além disso, para certas normas L^q, mostraremos que a solução depende continuamente do parâmetro $\lambda \geq 0$.

Abstract

In this work, we study the Laplace equation in the half-space $\mathbb{R}^N_+$ with a nonlinear supercritical Robin boundary condition $\frac{\partial u}{\partial \eta} + \lambda u = u|u|^{\rho-1} + f(x)$ on $\partial\mathbb{R}^N_+ = \mathbb{R}^{N-1}$, where $N \geq 3$ and $\lambda \geq 0$. Existence of solution $u \in E_{p,q} = D^{1,p}(\mathbb{R}^N_+) \cap L^q(\mathbb{R}^N_+)$ is obtained by means of a fixed point argument for a small data $f \in L^d(\mathbb{R}^{N-1})$. The indexes p, q are chosen for the norm $\|\cdot\|_{E_{p,q}}$ to be invariant by scaling of the boundary problem. The solution u is positive whether $f(x) > 0$ a.e. $x \in \mathbb{R}^{N-1}$. When f is radially symmetric, u is invariant under rotations around the axis $\{x_N = 0\}$. Moreover, in a certain L^q-norm, we show that solutions depend continuosly on the parameter $\lambda \geq 0$.

Sumário

Introdução

Um equação geral de EDP eliptica é definido na forma:

$$Lu(x) = f(x), \qquad x \in \Omega,$$

onde L é um operador diferencial dado pela expressão

$$L = \sum_{i,j=1}^{N} a_{i,j} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{N} b_i \frac{\partial}{\partial x_i} + c$$

u é uma função a determinar e f é dada a priori. As quatro equações de EDPs mais conhecidos são provavelmente a equação de Transporte, equação da Onda, equação de Calor e a equação de Poisson. Desta última um dos casos mais importantes é o caso $f \equiv 0$ conhecido como Equação de Laplace

$$\Delta u(x) = 0, \qquad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^N,$$

em que

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_N^2}.$$

Certamente, entre outras, qualquer expressão da forma $u(x) = a_1 x_1 + \cdots + a_N x_N$ é solução desta equação. Na busca de uma única solução começamos impondo condições tanto à fronteira como a u na fronteira. Uma das mais importantes condições de fronteira é a condição de tipo Robin, que dá origem ao seguinte problema:

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0, & x \in \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \eta}(x) + \lambda u(x) = g(u), & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{1}$$

Dado o problema (1), vamos estudar o caso particular $g(u) = (u|u|^{\rho-1} + f)(x)$, isto é:

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0, & x \in \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \eta}(x) + \lambda u(x) = u|u|^{\rho-1} + f, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{2}$$

Neste tipo de problema o valor de ρ é muito importante. O problema (2) com $f \equiv 0$ já foi amplamente estudado nos últimos anos, No caso geral f não identicamente nula, para $2 \leq \rho \leq 2\frac{N-1}{N-2}$ é possível obter uma solução em espaços de Sobolev por meio de argumentos variacionais. Por outro lado, no caso de um domínio limitado e com $1 < \rho < \frac{N-1}{N-2}$ existência e regularidade de solução para o problema (2) já foram estudados.

Estimulados pelo problema (2) com as diversas restrições de ρ, apresentamos neste trabalho resultados de existência de solução no caso $\rho > \frac{N-1}{N-2}$ e f suficientemente pequena.

Em nosso plano para encontrar uma solução para o problema (2) com $\rho > \frac{N-1}{N-2}$, vamos introduzir uma função G_λ chamada função de Green para o problema (1), a qual sugere que a expressão para u seja da forma:

$$u(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^{N-1}} G_\lambda(x,y)g(y)dy, \tag{3}$$

ou, equivalentemente, para o nosso caso

$$u(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^{N-1}} G_\lambda(x,y)\Big(u|u|^{\rho-1} + f(y)\Big)dy. \tag{4}$$

Assim, definindo o operador

$$H(f)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^{N-1}} G_\lambda(x,y)f(y)dy \tag{5}$$

e o operador

$$\Psi(u) = H(f) + H(u|u|^{\rho-1}) \tag{6}$$

no espaço

$$E = E_{r_0,r_1} = D^{1,r_0}(\mathbb{R}^N_+), \tag{7}$$

com $r_0 = N\frac{\rho-1}{\rho}$ e $r_1 = N(\rho-1)$, vamos mostrar, pelo argumento de ponto fixo, que o problema (2) tem solução e, além disso, que a solução satisfaz o seguinte escalonamento

$$u(x) \to u_\sigma(x) = \sigma^{\frac{1}{\rho-1}}u(\sigma x).$$

Posteriormente, mostraremos a relação entre a função f e a função u e, finalmente, apresentaremos um capítulo contendo a dedução de algumas identidades de Green para o operador poli-harmônico, tendo como objetivo futuro resolver o seguinte problema

$$\begin{cases} (-\Delta)^p u = 0, x \in \mathbb{R}^N_+, \\ \frac{\partial(-\Delta)^t u}{\partial\eta} + \lambda(-\Delta)^t u = g(u,f), t = 1, \cdots p-1, x \in \partial\mathbb{R}^N_+. \end{cases}$$

Capítulo 1

Funções de Green

Neste primeiro capítulo vamos introduzir a função de Green, evidenciar a sua importância no estudo das EDP's como ferramenta para se resolver equação (1.2), com diferentes condições de fronteira (Dirichlet, Neumann e Robin) para um conjunto Ω aberto e limitado. Finalmente vamos deduzir fórmulas explicitas para as funções de Green e as soluções do problema de Laplace (Equação (1.2) com $f \equiv 0$) com as diversas condições de fronteira no semi-espaço $\mathbb{R}^N_+$. Certamente, os resultados neste capítulo são válidos para $N = 2$. Emtretanto, vamos apresentar as provas somente para $N \geq 3$ e apenas explicitar fórmulas no caso $N = 2$[a].

[a]O caso $N = 2$ pode ser visto como caso particular dos resultados do capítulo final.

1.1 Motivação

Consideremos uma equação na forma:

$$Lu(x) = f(x), \quad x \in \Omega, \tag{1.1}$$

onde L é um operador diferencial linear, u é uma função a determinar e f é dada de antemão. A solução da equação pode-se escrever formalmente, assim:

$$u(x) = L^{-1}f(x),$$

onde L^{-1}, o inverso de L, é algum operador integral. A ideia de Green foi construir uma função G de modo que:

$$LG(x,y) = \delta(x-y),$$

onde $G(x,y)$ é chamada a função de Green associada com L e δ é a distribução δ (Dirac) a qual satisfaz

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} \delta(x)dx = 1 \qquad e \qquad \int\limits_{\mathbb{R}^N} \delta(x-y)h(y)dy = h(x),$$