Universidade Federal Fluminense

Apostila de Introdução Aos Métodos Numéricos

PARTE III

2º Semestre - 2002

Profª. Salete Souza de Oliveira Buffoni

Índice

INTERPOLAÇÃO POLINOMIAL 3

INTRODUÇÃO 3

FORMA DE LAGRANGE 4

Interpolação para 2 pontos (n+1=2) - ajuste de retas (n=1).. 5

Interpolação para 3 pontos (n+1=3) - ajuste de parábolas (n=2) 6

SÉTIMA LISTA DE EXERCÍCIOS..9

FORMA DE NEWTON..10

Tabela de Diferenças Divididas... 10

Forma de Newton para o Polinômio Interpolador 11

OITAVA LISTA DE EXERCÍCIOS..15

Interpolação Polinomial

Introdução

Vamos supor que temos um conjunto de dados $\{x_i, f(x_i)\}$ tal como na tabela abaixo:

x_i	0	1,5	3,0	4,5	6,0
$f(x_i)$	0,001	0,016	0,028	0,046	0,057

Nosso problema é obter o valor de $f(x)$ para um valor de x que não tenha sido medido, como por exemplo, $x=2.0$.

Por exemplo, quando não temos muitos dados (que levaria a um mau ajuste de uma função) e só queremos saber o valor de $f(x)$ para um x intermediário entre duas medidas, isto é, $x_i<x<x_{i+1}$, podemos usar as técnicas da interpolação.

Portanto, **interpolar** um ponto x a um conjunto de $n+1$ dados $\{x_i, f(x_i)\}$, significa simplesmente, calcular o valor de $f(x)$, sem conhecer a forma analítica de $f(x)$ ou ajustar uma função analítica aos dados.

A interpolação polinomial consiste em se obter um polinômio $p(x)$ que passe por **todos os pontos** do conjunto de $(n+1)$ dados $\{x_i, f(x_i)\}$, isto é:

$$p(x_0)=f(x_0) \quad \textbf{(1)}$$

$$p(x_1)=f(x_1)$$

...

$$p(x_n)=f(x_n)$$

(note que a contagem começa em zero, portanto temos $n+1$ pontos na expressão acima).

O polinômio $p(x)$ é chamado de **polinômio interpolador**. É possível se demonstrar que existe um único polinômio $p(x)$ de grau menor ou igual a n que passa por todos os $(n+1)$ pontos do conjunto $\{x_i, f(x_i)\}$

Portanto, podemos escrever:

$$p_n(x_0) = a_0 + a_1 \cdot x_0 + a_2 \cdot x_0^2 + \cdots + a_n \cdot x_0^n = f(x_0)$$

$$p_n(x_1) = a_0 + a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_1^2 + \cdots + a_n \cdot x_1^n = f(x_1)$$

...

$$p_n(x_n) = a_0 + a_1 \cdot x_n + a_2 \cdot x_n^2 + \cdots + a_n \cdot x_n^n = f(x_n)$$

Esse conjunto de equações corresponde a um sistema linear de *n+1* equações e *n+1* variáveis. Portanto, ele poderia ser resolvido diretamente. Essa é uma das formas de se obter o polinômio interpolador.

Entretanto, existem outras formas, como a forma de Lagrange e a forma de Newton, que veremos a seguir.

Forma de Lagrange

Introdução :

Sendo conhecidos os valores de uma função apenas em determinados pontos, a INTERPOLAÇÃO é um procedimento que possibilita a estimativa de valores desconhecidos da função, bem como auxilia na integraçãode uma função desconhecida ou de difícil integração.

Seja um conjunto de *n+1* dados $\{x_i, f(x_i)\}$. Queremos encontrar um polinômio interpolador *p(x)* que satisfaça a condição (1), isto é, passe por todos os pontos.

Uma possível forma para *p(x)* que satisfaça (1) é:

$$p(x) = L_0(x) \cdot f(x_0) + L_1(x) \cdot f(x_1) + \cdots + L_n(x) \cdot f(x_n) \qquad \textbf{(2)}$$

onde os $L_k(x)$ são polinômios tais que:

$$L_k\left(x_i\right) = \delta_{ki} \qquad \textbf{(3)}$$

sendo que:

$$\delta_{ki} = \begin{cases} 0 & se, k \neq i \\ 1 & se, k = i \end{cases} \qquad \textbf{(4)}$$

Portanto,

$$p(x_0) = L_0(x_0) \cdot f(x_0) + L_1(x_0) \cdot f(x_1) + \cdots + L_n(x_0) \cdot f(x_n)$$
$$p(x_0) = 1 \cdot f(x_0) + 0 \cdot f(x_1) + \cdots + 0 \cdot f(x_n)$$
$$p(x_0) = f(x_0)$$

e,

$$p(x_1) = L_0(x_1) \cdot f(x_0) + L_1(x_1) \cdot f(x_1) + \cdots + L_n(x_1) \cdot f(x_n)$$
$$p(x_1) = 0 \cdot f(x_0) + 1 \cdot f(x_1) + \cdots + 0 \cdot f(x_n)$$
$$p(x_1) = f(x_1)$$

ou seja:

$$p(x_i) = f(x_i)$$

o que mostra que o polinômio interpolador *p(x)* passa exatamente sobre os pontos $\{x_i, f(x_i)\}$ da tabela dada.

Temos agora que encontrar os polinômios $L_k(x)$, que satisfaçam (3). Uma função que satisfaz a condição (3) é:

$$L_k(x) = \frac{(x-x_0)\cdot(x-x_1)\cdot\dots\cdot(x-x_{k-1})\cdot(x-x_{k+1})\cdot\dots\cdot(x-x_n)}{(x_k-x_0)\cdot(x_k-x_1)\cdot\dots\cdot(x_k-x_{k-1})\cdot(x_k-x_{k+1})\cdot\dots\cdot(x_k-x_n)}$$

que é fácil verificar, pois:

$$L_k(x_k) = 1 \quad e$$
$$L_k(x_i) = 0 \quad se, i \neq k$$

De maneira compacta, podemos escrever o polinômio interpolador na **Forma de Lagrange**, como:

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x)\cdot f(x_i) \qquad \textbf{(5)}$$

e,

$$L_i(x) = \frac{\prod\limits_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}(x-x_j)}{\prod\limits_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}(x_i-x_j)}$$

Interpolação para 2 pontos (n+1=2) - ajuste de retas (n=1)

x_i	x_0	x_1
$f(x_i)$	$f(x_0)$	$f(x_1)$

De (5) :

$$p(x) = \sum_{i=0}^{1} L_i(x).f(x_i) = L_0(x).f(x_0) + L_1(x).f(x_1) \qquad \textbf{(6)}$$

As funções L_i (x) devem satisfazer (3), ou seja:

$L_0(x_0) = 1$	$L_1(x_0) = 0$
$L_0(x_1) = 0$	$L_1(x_1) = 1$

(7)

É fácil verificar que, as seguintes funções, satisfazem (7) :

$$L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \qquad\qquad L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \tag{8}$$

De (8) em (6) :

$$p(x) = \left(\frac{x - x_1}{x_0 - x_1}\right) \cdot f(x_0) + \left(\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\right) \cdot f(x_1)$$

Interpolação para 3 pontos (n+1=3) - ajuste de parábolas (n=2)

$\boldsymbol{x_i}$	x_0	x_1	x_2
$f(x_i)$	$f(x_0)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$

De (5):

$$p(x) = \sum_{i=0}^{2} L_i \cdot f(x_i) = L_0 \cdot f(x_0) + L_1 \cdot f(x_1) + L_2 \cdot f(x_2) \tag{9}$$

onde:

$L_0(x_0) = 1$ $\quad$ $L_1(x_0) = 0$ $\quad$ $L_2(x_0) = 0$

$L_0(x_1) = 0$ $\quad$ $L_1(x_1) = 1$ $\quad$ $L_2(x_1) = 0$

$L_0(x_2) = 0$ $\quad$ $L_1(x_2) = 0$ $\quad$ $L_2(x_2) = 1$

Por construção:

$$L_0 = \frac{(x - x_1)\cdot(x - x_2)}{(x_0 - x_1)\cdot(x_0 - x_2)}$$

$$L_1 = \frac{(x - x_0)\cdot(x - x_2)}{(x_1 - x_0)\cdot(x_1 - x_2)}$$

$$L_2 = \frac{(x - x_0)\cdot(x - x_1)}{(x_2 - x_0)\cdot(x_2 - x_1)}$$

Portanto:

$$p(x)=\frac{(x-x_1)\cdot(x-x_2)}{(x_0-x_1)\cdot(x_0-x_2)}\cdot f(x_0)+\frac{(x-x_0)\cdot(x-x_2)}{(x_1-x_0)\cdot(x_1-x_2)}\cdot f(x_1)+\frac{(x-x_0)\cdot(x-x_1)}{(x_2-x_0)\cdot(x_2-x_1)}\cdot f(x_2)$$

Exemplo:

Ajuste uma reta aos seguintes pontos:

x	2	4
f(x)	3,1	5,6

$$p(x)=\left(\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)\cdot f(x_0)+\left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)\cdot f(x_1)$$

$$p(x)=\left(\frac{x-4}{2-4}\right)\cdot 3.1+\left(\frac{x-2}{4-2}\right)\cdot 5.6=-1.55\cdot(x-4)+2.8\cdot(x-2)$$

$$p(x)=1.25\cdot x+0.6$$

Ex.: Interpolação linear

Tabela

x	y
10	250
20	432
30	500

Qual o valor de y para x = 15?

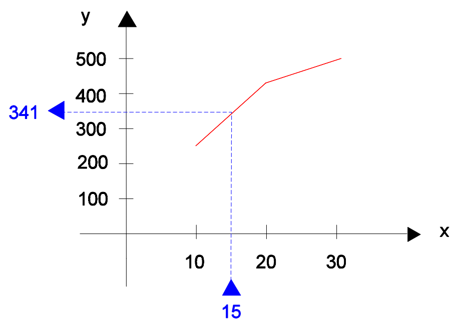

Fig. 9 - Interpolação Linear

+−

Interpolação linear entre 2 pontos conhecidos (x_1, y_1), (x_2, y_2)

$$y = y_1 + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} (y_2 - y_1)$$

$$y = 250 + \frac{15 - 10}{20 - 10} (432 - 250) = 341$$

Sétima Lista de Exercícios

1) Qual a relação entre o número de pontos usados na interpolação e o grau do polinômio interpolador que pode ser calculado?

2) Se você tiver um conjunto de 5 dados $\{(x_0,f(x_0)), (x_1,f(x_1)), (x_2,f(x_2)), (x_3,f(x_3)), (x_4,f(x_4)),\}$, e deseja fazer uma interpolação linear, isto é, encontrar uma reta que lhe permita obter o valor de $f(x')$, onde $x_1<x'<x_2$:

a) Qual seria o grau do polinômio que você calcularia, isto é, quantos pontos você utilizaria?

b) E quais pontos da tabela você usaria?

3) A seguinte tabela informa o número de carros que passam por um determinado pedágio em um determinado dia:

Horário	10:00	10:30	11:00	11:30	12:00	12:30
Número (em mil)	2.69	1.64	1.09	1.04	1.49	2.44

a) Faça um gráfico de horário vs. número de carros para verificar qual a tendência da curva.

b) Estime o número de carros que passariam pelo pedágio às 11:10, usando a forma de Lagrange para encontrar um polinômio interpolador $p(x)$ que estima o número de carros em função do tempo. Use uma reta como função interpoladora.

c) Agora, faça a mesma estimativa, mas utilizando uma parábola como polinômio interpolador.

Forma de Newton

Tabela de Diferenças Divididas.

O próximo a método de interpolação a ser estudado é a “Forma de Newton”. No entanto, para que possamos discutir este método temos que antes nos familiarizar com a construção da chamada “Tabela de Diferenças Divididas”

Seja a tabela de valores:

x	x_0	x_1	x_2	x_3
f(x)	$f(x_0)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$f(x_3)$

Podemos construir a seguinte tabela:

x	$f(x_i)$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}]$
x_0	$f(x_0)$			
		$f[x_0,x_1]$		
x_1	$f(x_1)$		$f[x_0,x_1,x_2]$	
		$f[x_1,x_2]$		$f[x_0,x_1,x_2,x_3]$
x_2	$f(x_2)$		$f[x_1,x_2,x_3]$	
		$f[x_2,x_3]$		
x_3	$f(x_3)$			

onde:

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$f[x_1, x_2] = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$f[x_2, x_3] = \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$$

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}$$