

Universidade de São Paulo  
Instituto de Física de São Carlos

## Invariantes Diferenciais do Grupo Simplético

*Marconi Soares Barbosa*

Tese apresentada ao Instituto de Física de São Carlos da Universidade de São Paulo para a obtenção do Título de **Doutor** em Ciências:  
**Física Básica**

Orientador: Prof. Dr. *Esmerindo de Sousa Bernardes*

Departamento de Física e Ciência dos Materiais  
São Carlos 2002

Invariantes Diferenciais do Grupo Simplético

/Marconi Soares Barbosa, São Carlos 2002. < 109 >p.

Tese(Doutorado)-Instituto de Física de São Carlos, 2002

Orientador: Prof. Dr. Esmerindo de Sousa Bernardes

1. Invariantes Diferenciais 2. Modelos Algébricos I. Título.

## Agradecimentos

- ✂ À todos que contribuíram, de uma forma ou de outra, para transformar a possibilidade desta tese em realidade.
- ✂ Ao Prof. Esmerindo, pelo crédito, estímulo e colaboração.
- ✂ To Prof. Ian Stewart, for the Warwick experience.
- ✂ À Marcella, por tudo.



*Silence is the universal refuge, the sequel to all dull discourses and all foolish acts, a balm to our every chagrin, as welcome after satiety as after disappointment; that background which the painter may not daub, be he master or bungler, and which, however awkward a figure we may have made in the foreground, remains ever our inviolable asylum, where no indignity can assail, no personality can disturb us.*

Henry David Thoreau (1817-62), U.S. philosopher, author, naturalist. A Week on the Concord and Merrimac Rivers, "Friday" (1849).

Este trabalho é dedicado à minha Família.

## Abstract

The symplectic algebra  $sp(2n)$  is realized, via the technique of boson operators, its local group action taking place on a section of a jet-space associated with the independent variables. The dependent variables are held untouched by the flow. Nonetheless, its derivatives transform under the action of the prolonged vector fields, implied by the action of the vector field on the independent variables. The existence of an invariant contact coframe allows us to exhibit invariant differential operators which produce differential invariants by differentiating lower order ones. We present explicitly the second-order differential invariants for  $sp(2n), n = 1, 2, 3$ . Higher-order invariants may be produced at will by further differentiation. These differential invariants so obtained yield an explicit functional basis for locally symmetric partial differential equations whose solutions are related by symplectic operations. This new class of non-linear partial differential equations with pre-defined symmetry not just offer its well known symmetry related operational benefits, but restrains the form that a variational problem with such symmetry would exhibit.

## Resumo

A álgebra simpléctica  $sp(2)$  é realizada em termos de operadores bosônicos e sua ação local acontece numa porção de um *jet-space* associado com as variáveis independentes. Entretanto as derivadas da variável dependente, que é mantida fixa, se transformam sob a ação dos campos vetoriais prolongados. A existência de um *coframe* invariante neste *jet-space* nos permite construir operadores diferenciais invariantes que produzem invariantes diferenciais através de sua ação em invariantes de ordem menor. Apresentamos explicitamente neste trabalho invariantes diferenciais de segunda ordem para  $sp(2n)$ ,  $n = 1, 2, 3$ . Todos invariantes de ordem maior podem ser obtidos mediante diferenciação. Estes invariantes diferenciais assim obtidos constituem uma base funcional explícita para equações diferenciais parciais invariantes pela ação local do grupo simpléctico. Esta nova classe de equações diferenciais parciais com simetria pré-determinada não somente oferece seu cardápio usual de benefícios operacionais relacionados com a simetria carregada, mas restringe o formato que um problema variacional com tal simetria pode apresentar.

# Conteúdo

<b>I</b>	<b>Preliminares</b>	<b>11</b>
<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>12</b>
1.1	Resumo do Projeto . . . . .	12
1.2	Resultados . . . . .	13
<b>2</b>	<b>Fundamentos Geométricos</b>	<b>17</b>
2.1	Ação de Grupos de Lie . . . . .	17
2.2	Campos Vetoriais . . . . .	18
2.3	Invariância Diferencial . . . . .	19
2.4	Invariantes Diferenciais . . . . .	22
2.5	Formas de Contato . . . . .	25
2.5.1	Objetos Duais Invariantes . . . . .	25
2.6	Operadores Diferenciais Invariantes . . . . .	26
<b>3</b>	<b>Realização Polinomial</b>	<b>28</b>
3.1	Realização bosônica de álgebras simpléticas . . . . .	28
3.1.1	Introdução . . . . .	28
3.1.2	Realização bosônica . . . . .	29
3.1.3	A estrutura da álgebra $sp(4)$ e $sp(6)$ . . . . .	30
3.1.4	Representações unitárias . . . . .	31
3.1.5	Invariantes simpléticos . . . . .	34
<b>II</b>	<b>Invariantes Diferenciais</b>	<b>36</b>
<b>4</b>	<b>Invariantes diferenciais para <math>sp(2)</math></b>	<b>37</b>
4.1	Introdução . . . . .	37
4.2	Realização com dois bósons; Invariantes até segunda ordem . . . . .	38
4.2.1	Características e seus invariantes ordinários . . . . .	38



4.2.2	Prolongações de primeira ordem e seus invariantes diferenciais . . . . .	39
4.2.3	Prolongações de segunda ordem e seus invariantes diferenciais . . . . .	41
4.3	Mais que dois bósons, Ordem qualquer . . . . .	44
4.3.1	Prolongações além de segunda ordem . . . . .	44
4.3.2	Formas de contato . . . . .	45
4.4	Um único bóson; Ordem qualquer . . . . .	48
4.4.1	Um algoritmo eficiente . . . . .	50
<b>5</b>	<b>Invariantes diferenciais para <math>sp(2j + 1)</math></b>	<b>53</b>
5.1	Introdução . . . . .	53
5.2	Invariantes diferenciais simpléticos, $n_b \geq 2j + 1$ . . . . .	53
5.2.1	Prolongações para álgebras simpléticas . . . . .	53
5.2.2	Invariantes diferenciais via <i>frame</i> Invariante . . . . .	54
5.3	Invariantes diferenciais simpléticos, $n_b < 2j + 1$ . . . . .	57
5.3.1	Invariantes diferenciais até segunda ordem para $sp(4)$ : um bóson . . . . .	57
5.3.2	Invariantes diferenciais até segunda ordem para $sp(4)$ : dois bósons . . . . .	60
5.3.3	Invariantes diferenciais até segunda ordem para $sp(6)$ : um bóson . . . . .	66
5.3.4	Invariantes diferenciais até segunda ordem para $sp(6)$ : dois bósons . . . . .	69
5.3.5	Invariantes diferenciais até segunda ordem para $sp(6)$ : três bósons . . . . .	69
<b>6</b>	<b>Conclusões e Perspectivas</b>	<b>72</b>
<b>III</b>	<b>Apêndices</b>	<b>75</b>
<b>A</b>	<b>Método das características para EDPs de primeira ordem</b>	<b>76</b>
<b>B</b>	<b>Invariantes diferenciais para <math>SO(n)</math></b>	<b>78</b>
<b>C</b>	<b>Simetria em Equações Diferenciais</b>	<b>81</b>
C.1	Preliminares . . . . .	81
C.2	Invariância Infinitesimal . . . . .	86
C.3	Soluções Por Similaridade . . . . .	86
<b>D</b>	<b>Constantes de Movimento em Sistemas Hamiltonianos</b>	<b>89</b>
D.1	Introdução . . . . .	89
D.2	Método direto . . . . .	90
D.3	Teorema de Noether . . . . .	94

---

<b>E Rotinas Algébricas</b>	<b>97</b>
E.0.1 Realização bosônica . . . . .	97
E.0.2 Prolongações . . . . .	99
E.0.3 Invariantes diferenciais . . . . .	103
E.0.4 Rotinas auxiliares . . . . .	104

## Gracias por visitar este Libro Electrónico

Puedes leer la versión completa de este libro electrónico en diferentes formatos:

- HTML(Gratis / Disponible a todos los usuarios)
- PDF / TXT(Disponible a miembros V.I.P. Los miembros con una membresía básica pueden acceder hasta 5 libros electrónicos en formato PDF/TXT durante el mes.)
- Epub y Mobipocket (Exclusivos para miembros V.I.P.)

Para descargar este libro completo, tan solo seleccione el formato deseado, abajo:

