G E O M E T R I A
E L E M E N T A R

"Entre os espíritos iguais e postos nas mesmas condições, o que conhece GEOMETRIA é superior aos outros e possui vigor especial."

Pascal

MARISTA

APRESENTAÇÃO

Este livro maravilhoso, escrito pelos Irmãos Maristas e publicado pela editora marista FTD no início do século XX, traz mais de 600 problemas resolvidos de excelente nível envolvendo Geometria Plana, Geometria Espacial e Cônicas.

Trata-se de uma obra prima recheada com centenas de problemas de construção, inúmeras demonstrações variadas envolvendo planimetria, geometria espacial, e um maravilhoso tratamento das cônicas (elipse, hipérbole e parábola) sem recorrer à geometria analítica !

Nem mesmo o tempo foi capaz de alterar o brilho dessa obra, escrita com muito vigor pelos irmãos maristas, com linguagem bastante simples, objetiva e acessível a qualquer leitor interessado em aprimorar e aprofundar seus conhecimentos no mais mágico e desafiador segmento da Matemática elementar: a Geometria.

O nível dos problemas aqui contidos estimulará mesmo os leitores mais exigentes. Provavelmente, os problemas mais difíceis de Geometria contidos nos modernos livros brasileiros encontram-se resolvidos na presente obra, cujo valor é inestimável para os amantes da Geometria, podem ter certeza.

Mais uma vez, preocupada em resgatar para a presente e futuras gerações o que há de melhor em livros de ciências exatas, a VestSeller tem a honra de reeditar esta obra prima e, juntamente com todo o povo brasileiro, saudar e agradecer os irmãos maristas pela incomensurável contribuição que dão à educação nesse país desde que aqui chegaram, no final do século XVIII, até os dias de hoje.

Prof. Renato Brito
(ex-aluno do colégio marista cearense)
Editora VestSeller
Setembro / 2009

SUMÁRIO

GEOMETRIA ELEMENTAR

EXERCÍCIOS DE GEOMETRIA

CAPÍTULO 1

1. Construir o complemento de um ângulo dado.

Solução: seja o ângulo AOB. Se, sobre o lado OB, no ponto O, elevarmos uma perpendicular OC, o ângulo AOC será o ângulo procurado, pois AOB + AOC = BOC = 1 reto.

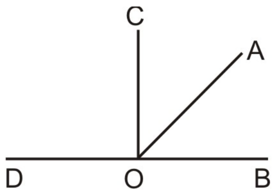

Fig. 1

2. Construir o suplemento de um ângulo dado.

Solução: seja o mesmo ângulo AOB. Se prolongarmos a reta BO, o ângulo AOD será o ângulo procurado, pois AOB + AOD = 2 retos.

3. Mostre que as bissetrizes de dois ângulos adjacentes suplementares são perpendiculares uma à outra.

Solução: com efeito, sejam os dois ângulos suplementares e adjacentes AOB e AOC, e OD e OE as bissetrizes dos mesmos ângulos. Temos por definição: AOB + AOC = 2 retos;

Logo: $\frac{1}{2}$ AOB + $\frac{1}{2}$ AOC = 1 reto.

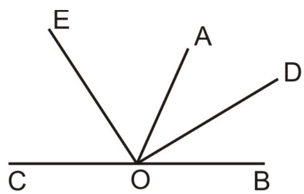

Fig. 2

4. Mostre que as bissetrizes de dois ângulos opostos pelo vértice estão em linha reta.

Solução: Sejam OK a bissetriz do ângulo AOB, e OL a do ângulo COD.
Temos: BOK + KOA + AOC = 2 retos; mas BOK= COL;
Logo: KOA + AOC + COL = 2 retos;
Logo: OL é o prolongamento de OK.

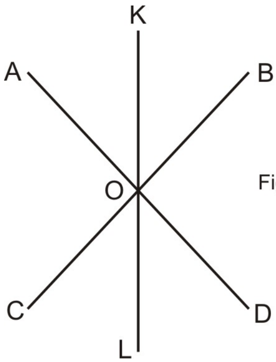

Fig. 3

5. *Quantas diagonais podem ser tragadas em um polígono convexo de n lados?*

Solução: Cada vértice, A, pode ser ligado a todos os outros, menos a seus vizinhos, o que dá, para cada vértice, n – 3 diagonais. Por conseguinte, para os n vértices, deveríamos ter: n(n – 3) diagonais ao todo. Mas cada diagonal é contada, duas vezes. Assim, a diagonal AD pode ser obtida unindo o ponto A ao ponto D, ou ligando o ponto D ao ponto A; e, como o mesmo se dá para todas as outras, resulta que poderão ser traçadas ao todo $n\left(\frac{n-3}{2}\right)$ diagonais .

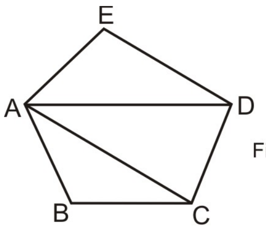

Fig. 4

Aplicações numéricas:

- Para o triângulo, n – 3 = 0;

Logo: $n\left(\frac{n-3}{2}\right)=0$

- Para o quadrilátero, temos n = 4; n – 3 = 1;

Logo: $n\left(\frac{n-3}{2}\right)=2$

6. *Mostre que a soma das diagonais de um quadrilátero convexo é menor que a soma e maior que a semi-soma de seus lados.*

Solução: Deveremos ter: AC + BD < AB + BC + CD + AD.

AC + BD > $\frac{1}{2}$ (AB + BC + CD + AD).

1) Temos: AC < AB + BC
AC < AD + DC.
Temos igualmente: BD < BC + CD
BD < AB + AD.
Somando estas desigualdades membro a membro, e dividindo cada soma por 2, obtemos:

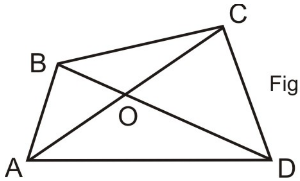

Fig. 5

AC + BD < AB + BC + CD + AD.
2) Temos: OA + OB > AB
OB + OC > BC
OC + OD > CD
OD + OA > AD.
Somando estas desigualdades, e dividindo cada soma por 2, temos:
OA + OB + OC + OD > $\frac{1}{2}$ (AB + BC + CD + AD),

ou, finalmente: AC + BD > $\frac{1}{2}$ (AB + BC + CD + AD).

7. Demonstre que a soma das retas que ligam um ponto interior de um triângulo aos três vértices, é menor que a soma e maior que a semi-soma dos três lados do triângulo.

Solução:
Teremos:
OA + OB + OC < AB + AC + BC;
OA + OB + OC > $\frac{1}{2}$ (AB + AC + BC).

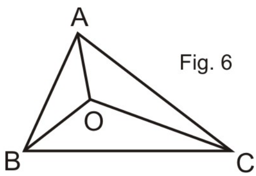

Fig. 6

1) Tem-se:
OA + OB < AC + BC
OB + OC < AB + AC
OA + OC < AB + BC.
Somando membro a membro e dividindo por 2, temos:
OA + OB + OC < AB + AC + BC.

2) Temos também:
   OA + OB > AB
   OA + OC > AC
   OB + OC > BC.

Somando e dividindo por 2, obtemos:

OA + OB + OC > $\frac{1}{2}$ (AB + AC + BC).

8. Demonstre que dois polígonos são iguais quando têm n – 1 lados consecutivos iguais, compreendendo n – 2 ângulos iguais e semelhantemente dispostos.

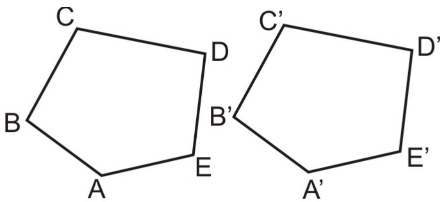

Fig. 7

Solução:

Temos:

AB = A'B', BC = B'C', CD = C'D', DE = D'E', B = B', C = C', D = D';

digo que os dois polígonos são iguais.

Com efeito, transporto o polígono A'B'C'D'E' sobre ABCDE, de modo que A'B' coincida com AB. Em consequência da igualdade dos ângulos, os lados B'C', C'D', D'E' coincidirão respectivamente com os lados iguais BC, CD, DE.

Estando A' sobre A, e E' sobre E, A'E' se confundirá com AE, e o mesmo se dará com os polígonos.

9. Mostre que dois polígonos são iguais quando têm n – 2 lados consecutivos iguais adjacentes a n – 1 ângulos iguais e semelhantemente dispostos.

Solução:

Temos: AB = A'B', BC = B'C', CD = C'D'; A = A', B = B', C = C', D = D';

digo que os dois polígonos são iguais.

Com efeito, transporto o polígono A'B'C'D'E' sobre ABCDE, de modo que A'B' coincida com AB. Em consequência da igualdade dos ângulos, os lados B'C', C'D' coincidirão respectivamente com os lados iguais BC, CD. Por outra, por causa de A' = A e D' = D, A'E' toma a direção de AE, e D'E' a de DE: o ponto E' cairá, pois, sobre o ponto E, e os dois polígonos serão iguais.

10. Demonstre que dois polígonos são iguais quando têm todos os lados, e n – 3 ângulos consecutivos respectivamente iguais e semelhantemente dispostos.