

GEOMETRIA ELEMENTAR

*“Entre os espíritos iguais e postos
nas mesmas condições, o que
conhece GEOMETRIA é superior aos
outros e possui vigor especial.”*

Pascal



APRESENTAÇÃO

Este livro maravilhoso, escrito pelos Irmãos Maristas e publicado pela editora marista FTD no início do século XX, traz mais de 600 problemas resolvidos de excelente nível envolvendo Geometria Plana, Geometria Espacial e Cônicas.

Trata-se de uma obra prima recheada com centenas de problemas de construção, inúmeras demonstrações variadas envolvendo planimetria, geometria espacial, e um maravilhoso tratamento das cônicas (elipse, hipérbole e parábola) sem recorrer à geometria analítica !

Nem mesmo o tempo foi capaz de alterar o brilho dessa obra, escrita com muito vigor pelos irmãos maristas, com linguagem bastante simples, objetiva e acessível a qualquer leitor interessado em aprimorar e aprofundar seus conhecimentos no mais mágico e desafiador segmento da Matemática elementar: a Geometria.

O nível dos problemas aqui contidos estimulará mesmo os leitores mais exigentes. Provavelmente, os problemas mais difíceis de Geometria contidos nos modernos livros brasileiros encontram-se resolvidos na presente obra, cujo valor é inestimável para os amantes da Geometria, podem ter certeza.

Mais uma vez, preocupada em resgatar para a presente e futuras gerações o que há de melhor em livros de ciências exatas, a VestSeller tem a honra de reeditar esta obra prima e, juntamente com todo o povo brasileiro, saudar e agradecer os irmãos maristas pela incomensurável contribuição que dão à educação nesse país desde que aqui chegaram, no final do século XVIII, até os dias de hoje.

Prof. Renato Brito
(ex-aluno do colégio marista cearense)
Editora VestSeller
Setembro / 2009

SUMÁRIO

Capítulo 1	<ul style="list-style-type: none">▪ Demonstrações envolvendo triângulos;▪ Problemas de construção;▪ Demonstrações envolvendo quadriláteros.	7
Capítulo 2	<ul style="list-style-type: none">▪ Problemas de construção envolvendo círculos, tangentes e secantes, inscrição e circunscrição.▪ Demonstrações envolvendo triângulos e círculos;▪ Problemas de construção envolvendo círculos inscrito e círculo ex-inscrito;▪ Problemas de construção envolvendo paralelogramos e trapézios.	35
Capítulo 3	<ul style="list-style-type: none">▪ Demonstrações envolvendo cevianas;▪ Demonstrações envolvendo triângulos e circunferências;▪ Demonstrações envolvendo quadriláteros e circunferências;▪ Demonstrações envolvendo polígonos.	95
Capítulo 4	<ul style="list-style-type: none">▪ Problemas envolvendo áreas de triângulos e quadriláteros;▪ Problemas envolvendo divisão de áreas em razão dada;▪ Problemas envolvendo áreas de polígonos.	143
Capítulo 5	<ul style="list-style-type: none">▪ Problemas envolvendo paralelepípedos e pirâmides.	188
Capítulo 6	<ul style="list-style-type: none">▪ Problemas envolvendo divisão de volume de sólidos em razão dada.	190
Capítulo 7	<ul style="list-style-type: none">▪ Problemas envolvendo sólidos de revolução;▪ Problemas envolvendo cálculo de volumes gerados pela rotação de figuras planas.	203
Capítulo 8	<ul style="list-style-type: none">▪ Problemas de construção envolvendo elipses;▪ Demonstrações envolvendo elipses;▪ Demonstrações envolvendo hipérbolas;▪ Problemas de construção envolvendo parábolas;▪ Demonstrações envolvendo parábolas.	210
Capítulo 9	<ul style="list-style-type: none">▪ Problemas de revisão do capítulo 1;▪ Demonstrações envolvendo triângulos;▪ Demonstrações envolvendo cevianas.	224

Capítulo 10	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Problemas de revisão do capítulo 2; ▪ Demonstrações de construção envolvendo triângulos; ▪ Demonstrações envolvendo circunferências, triângulos, tangentes e secantes; ▪ Problemas de construção envolvendo circunferências e tangências. 	234
Capítulo 11	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Problemas de revisão do capítulo 3; ▪ Demonstrações envolvendo triângulos, circunferência inscrita e circunscrita; ▪ O círculo de Euler dos 9 pontos. 	247
Capítulo 12	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Problemas de revisão do capítulo 4; ▪ Lúnulas de Hipócrates; ▪ Problemas de máximos e mínimos envolvendo áreas de figuras isoperimétricas; ▪ Problemas de máximos e mínimos envolvendo inscrição e circunscrição de figuras planas. 	260
Capítulo 13	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Problemas de revisão do capítulo 5; ▪ Problemas de máximos e mínimos envolvendo paralelepípedos. 	278
Capítulo 14	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Problemas de revisão do capítulo 7; ▪ Problemas envolvendo sólidos de revolução; ▪ Problemas envolvendo inscrição e circunscrição de figuras espaciais; ▪ Problemas de máximo e mínimo envolvendo inscrição e circunscrição de figuras espaciais. 	282
Capítulo 15	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Problemas de revisão do capítulo 8; ▪ Demonstrações e teoremas envolvendo elipses e parábolas. 	296
Capítulo 16	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Apêndice sobre máximos e mínimos sem uso de cálculo diferencial. 	299

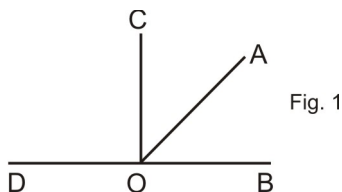
GEOMETRIA ELEMENTAR

EXERCÍCIOS DE GEOMETRIA

CAPÍTULO 1

1. Construir o complemento de um ângulo dado.

Solução: seja o ângulo AOB. Se, sobre o lado OB, no ponto O, elevarmos uma perpendicular OC, o ângulo AOC será o ângulo procurado, pois $AOB + AOC = BOC = 1$ reto.



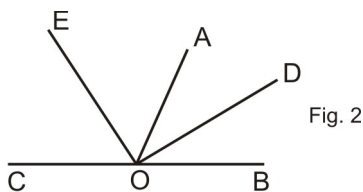
2. Construir o suplemento de um ângulo dado.

Solução: seja o mesmo ângulo AOB. Se prolongarmos a reta BO, o ângulo AOD será o ângulo procurado, pois $AOB + AOD = 2$ retos.

3. Mostre que as bissetrizes de dois ângulos adjacentes suplementares são perpendiculares uma à outra.

Solução: com efeito, sejam os dois ângulos suplementares e adjacentes AOB e AOC, e OD e OE as bissetrizes dos mesmos ângulos. Temos por definição: $AOB + AOC = 2$ retos;

Logo: $\frac{1}{2} AOB + \frac{1}{2} AOC = 1$ reto.



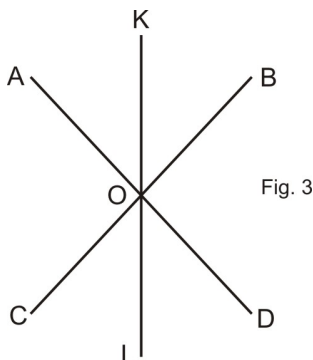
4. Mostre que as bissetrizes de dois ângulos opostos pelo vértice estão em linha reta.

Solução: Sejam OK a bissetriz do ângulo AOB, e OL a do ângulo COD.

Temos: $BOK + KOA + AOC = 2$ retos; mas $BOK = COL$;

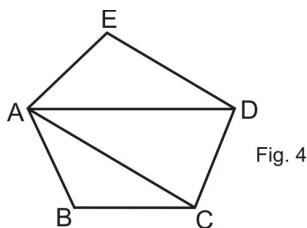
Logo: $KOA + AOC + COL = 2$ retos;

Logo: OL é o prolongamento de OK.



5. Quantas diagonais podem ser traçadas em um polígono convexo de n lados?

Solução: Cada vértice, A, pode ser ligado a todos os outros, menos a seus vizinhos, o que dá, para cada vértice, $n - 3$ diagonais. Por conseguinte, para os n vértices, deveríamos ter: $n(n - 3)$ diagonais ao todo. Mas cada diagonal é contada, duas vezes. Assim, a diagonal AD pode ser obtida unindo o ponto A ao ponto D, ou ligando o ponto D ao ponto A; e, como o mesmo se dá para todas as outras, resulta que poderão ser traçadas ao todo $n\left(\frac{n-3}{2}\right)$ diagonais .



Aplicações numéricas:

- Para o triângulo, $n - 3 = 0$;

Logo: $n\left(\frac{n-3}{2}\right) = 0$

- Para o quadrilátero, temos $n = 4$; $n - 3 = 1$;

Logo: $n\left(\frac{n-3}{2}\right) = 2$

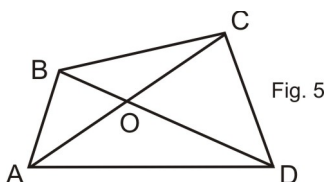
6. Mostre que a soma das diagonais de um quadrilátero convexo é menor que a soma e maior que a semi-soma de seus lados.

Solução: Deveremos ter: $AC + BD < AB + BC + CD + AD$.

$$AC + BD > \frac{1}{2} (AB + BC + CD + AD).$$

- 1) Temos: $AC < AB + BC$
 $AC < AD + DC.$
 Temos igualmente: $BD < BC + CD$
 $BD < AB + AD.$

Somando estas desigualdades membro a membro, e dividindo cada soma por 2, obtemos:



$$AC + BD < AB + BC + CD + AD.$$

- 2) Temos: $OA + OB > AB$
 $OB + OC > BC$
 $OC + OD > CD$
 $OD + OA > AD.$

Somando estas desigualdades, e dividindo cada soma por 2, temos:

$$OA + OB + OC + OD > \frac{1}{2} (AB + BC + CD + AD),$$

ou, finalmente: $AC + BD > \frac{1}{2} (AB + BC + CD + AD).$

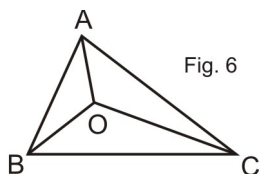
7. Demonstre que a soma das retas que ligam um ponto interior de um triângulo aos três vértices, é menor que a soma e maior que a semi-soma dos três lados do triângulo.

Solução:

Teremos:

$$OA + OB + OC < AB + AC + BC;$$

$$OA + OB + OC > \frac{1}{2} (AB + AC + BC).$$



- 1) Tem-se:
 $OA + OB < AC + BC$
 $OB + OC < AB + AC$
 $OA + OC < AB + BC.$

Somando membro a membro e dividindo por 2, temos:

$$OA + OB + OC < AB + AC + BC.$$

2) Temos também:

$$OA + OB > AB$$

$$OA + OC > AC$$

$$OB + OC > BC.$$

Somando e dividindo por 2, obtemos:

$$OA + OB + OC > \frac{1}{2} (AB + AC + BC).$$

- 8. Demonstre que dois polígonos são iguais quando têm $n - 1$ lados consecutivos iguais, compreendendo $n - 2$ ângulos iguais e semelhantemente dispostos.**

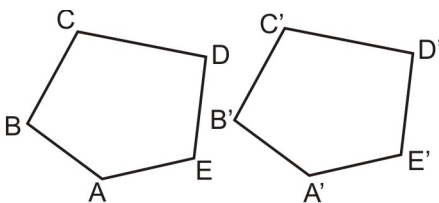


Fig. 7

Solução:

Temos:

$$AB = A'B', BC = B'C', CD = C'D', DE = D'E', B = B', C = C', D = D';$$

digo que os dois polígonos são iguais.

Com efeito, transporto o polígono $A'B'C'D'E'$ sobre $ABCDE$, de modo que $A'B'$ coincida com AB . Em consequência da igualdade dos ângulos, os lados $B'C'$, $C'D'$, $D'E'$ coincidirão respectivamente com os lados iguais BC , CD , DE .

Estando A' sobre A , e E' sobre E , $A'E'$ se confundirá com AE , e o mesmo se dará com os polígonos.

- 9. Mostre que dois polígonos são iguais quando têm $n - 2$ lados consecutivos iguais adjacentes a $n - 1$ ângulos iguais e semelhantemente dispostos.**

Solução:

$$\text{Temos: } AB = A'B', BC = B'C', CD = C'D'; A = A', B = B', C = C', D = D';$$

digo que os dois polígonos são iguais.

Com efeito, transporto o polígono $A'B'C'D'E'$ sobre $ABCDE$, de modo que $A'B'$ coincida com AB . Em consequência da igualdade dos ângulos, os lados $B'C'$, $C'D'$ coincidirão respectivamente com os lados iguais BC , CD . Por outra, por causa de $A' = A$ e $D' = D$, $A'E'$ toma a direção de AE , e $D'E'$ a de DE : o ponto E' cairá, pois, sobre o ponto E , e os dois polígonos serão iguais.

- 10. Demonstre que dois polígonos são iguais quando têm todos os lados, e $n - 3$ ângulos consecutivos respectivamente iguais e semelhantemente dispostos.**

Gracias por visitar este Libro Electrónico

Puedes leer la versión completa de este libro electrónico en diferentes formatos:

- HTML(Gratis / Disponible a todos los usuarios)
- PDF / TXT(Disponible a miembros V.I.P. Los miembros con una membresía básica pueden acceder hasta 5 libros electrónicos en formato PDF/TXT durante el mes.)
- Epub y Mobipocket (Exclusivos para miembros V.I.P.)

Para descargar este libro completo, tan solo seleccione el formato deseado, abajo:

