

MÉTODOS NUMÉRICOS

PROF. SERGIO ROBERTO DE FREITAS
sfreitas@nin.ufms.br

Departamento de Computação e Estatística
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul

12/01/2000

Conteúdo

1	Introdução	9
1.1	Soluções Não Construtivas	9
1.2	Soluções Construtivas	10
1.3	Problemas Reais x Métodos Numéricos	11
1.3.1	Cálculo da Idade da Lua	11
1.3.2	Crescimento de Bactérias em uma Colonia	13
1.3.3	Deflexão de uma Viga Simplesmente Engastada	13
1.3.4	Cálculo de Probabilidades - Distribuição Normal	14
2	Erros	17
2.1	Número Aproximado	17
2.2	Erros Absolutos e Relativos	17
2.2.1	Erro Absoluto	17
2.2.2	Cota para o Erro	18
2.2.3	Erro Relativo	18
2.3	Fontes de Erros	18
2.3.1	Erros Inerentes	18
2.3.2	Erros de Truncamento	19
2.3.3	Erros de Arredondamento	19
2.3.4	Aritmética de Ponto Flutuante	20
2.3.5	Representação de um Número com t Dígitos	21
2.4	Erros de Arredondamento	21
2.4.1	Arredondamento Truncado	21
2.4.2	Arredondamento Simétrico	22
2.4.3	Cotas para os Erros de Arredondamento	24
2.4.4	Casas Decimais Exatas	24
2.5	Propagação dos Erros	25
2.5.1	Propagação dos Erros Absolutos	25
2.5.2	Propagação dos Erros Relativos	27

2.6	Exercícios Propostos	30
3	Zeros de Funções	33
3.1	Delimitação dos zeros de uma função	34
3.1.1	Método Gráfico	34
3.1.2	Método Analítico	36
3.2	Método da Bissecção - MB	39
3.3	Método Iterativo Linear - MIL	43
3.3.1	Critérios de Parada	49
3.3.2	Ordem de Convergência do MIL	52
3.4	Método Iterativo Linear Modificado	55
3.5	Método de Newton - MN	59
3.5.1	O Algoritmo de Newton	59
3.5.2	Interpretação Geométrica	60
3.5.3	Condições de Convergência	61
3.5.4	Ordem de Convergência	64
3.6	Método da Secante - MS	66
3.6.1	Interpretação Geométrica do MS	67
3.6.2	Ordem de Convergência	68
3.7	Exercícios Propostos	69
4	Zeros de Polinômios	71
4.1	Números Complexos	71
4.2	Delimitação dos Zeros	74
4.3	Zeros Racionais	76
4.4	Método de Horner - Avaliação de $\mathbf{P}(z)$	77
4.5	Algoritmo de Horner - Caso Real	77
4.6	Algoritmo de Horner - Caso Complexo	79
4.7	Deflação de um Polinômio	81
4.8	Exercícios Propostos	83
5	Solução de Sistemas Lineares	85
5.1	Conceitos Fundamentais	85
5.2	Sistema de Equações Lineares	88
5.2.1	Interpretação Geométrica de Sistemas 2x2	89
5.2.2	Interpretação Geométrica de Sistemas 3x3	90
5.3	Métodos Diretos	91
5.3.1	Método de Cramer	92
5.3.2	Solução de Sistemas Triangulares	92
5.3.3	Eliminação Gaussiana	93

5.3.4	Estratégias para Escolha do Pivô	96
5.3.5	Cálculo de Determinantes	98
5.3.6	Cálculo da Inversa de uma Matriz	98
5.3.7	Estabilidade de Sistemas Lineares	100
5.3.8	Medida da Instabilidade	104
5.4	Exercícios Propostos	105
5.5	Métodos Iterativos	106
5.6	Método de Jacobi - MJ	109
5.7	Critério de Parada para as Iterações	110
5.8	Método de Gauss-Seidel - MGS	111
5.9	Interpretação Geométrica do MGS	112
5.10	Matrizes Diagonalmente Dominante	113
5.11	Exercícios Propostos	117
6	Ajuste de Curvas	119
6.1	Caso Linear	119
6.2	Método dos Mínimos Quadrados-MMQ	121
6.3	Sistema Normal para o MMQ	122
6.4	Casos Redutíveis ao Linear	126
6.5	Exercícios Propostos	130
7	Interpolação	133
7.1	Interpolação Linear	133
7.1.1	Estudo do Erro	135
7.1.2	Cota para o Erro	136
7.2	Interpolação Polinomial	136
7.3	Fórmula de Lagrange	138
7.3.1	Estudo do Erro	140
7.3.2	Cota para o Erro	141
7.4	Fórmulas de Newton	144
7.4.1	Operadores	144
7.4.2	Tabulação das Diferenças	147
7.4.3	Fórmula de Newton para Diferenças Progressivas	148
7.4.4	Estudo do Erro	150
7.4.5	Fórmula de Newton para Diferenças Regressivas	154
7.5	Exercícios Propostos	160
8	Integração Numérica	163
8.1	Método dos Trapézios	164
8.1.1	Cota para o Erro na Fórmula do Trapézio	167

8.2	Método de Simpson	169
8.2.1	Cota para o Erro na Fórmula de Simpson	173
8.3	Método dos Três Oitavos	177
8.4	Simpson+Três Oitavos	178
8.5	Exercícios Propostos	181
9	Métodos Numéricos para EDO'S	183
9.1	Introdução	183
9.2	Considerações Gerais sobre EDO's	184
9.3	EDO's de Primeira Ordem	184
9.4	Problema de Valor Inicial - PVI	185
9.5	Método de Picard	186
9.6	Solução por Série de Taylor	189
9.7	Erro Local e Erro Global	191
9.8	Métodos de Passo-Simples	192
9.9	Método de Euler	192
9.10	Interpretação Geométrica do Método de Euler	193
9.11	Método de Heun	195
9.12	Método de Runge-Kutta - RK₄	197
9.13	Métodos de Predição-Correção	199
9.14	Sistema Preditor-Corretor de Milne	203
9.15	Passo-Simples X Predição-Correção	203
9.16	Sistemas de EDO's	204
9.17	Runge-Kutta para Sistemas de EDO'S	206
9.18	EDO de Ordem Superior	206
9.19	Problemas de Fronteira de Segunda Ordem	208
9.20	Método do Artilheiro	209
9.21	Exercícios Propostos	212
13	Projetos	215
13.1	Idade da Lua	215
13.2	Cálculo da Inversa de uma Matriz	216
13.3	Um problema de Geometria	216
13.4	Principio de Arquimedes	217
13.5	Catenária	217
13.6	Distribuição de Temperatura numa Placa	219
13.7	Circuito Elétrico	219
13.8	Problema de Custos	220
13.9	Equação de Van der Pol	221
13.10	Problema de Refração	222

13.11 Deflexão de uma Viga Simplesmente Engastada	222
13.12 Deflexão de uma Viga Simplesmente Apoiada	223

Capítulo 1

Introdução

A matemática é, de alguma maneira, usada na maioria das aplicações da ciência e da tecnologia. Tem sempre havido uma relação muito próxima entre a matemática de um lado e a ciência e tecnologia do outro.

Algumas de suas áreas surgiram e foram desenvolvidas na tentativa, as vezes até frustrada, de solucionar *problemas reais*, ou seja, aqueles relacionados com alguma situação prática.

Com frequência estes *problemas reais* não podem ser convenientemente solucionados através de fórmulas exatas. Assim se for possível *aceitar* uma *solução aproximada* os **métodos numéricos** serão as *ferramentas* adequadas para sua solução.

Uma grande fonte de métodos numéricos são as soluções e demonstrações matemáticas que geram **métodos construtivos** ou **algorítmicos**. Os algoritmos gerados são utilizados para se obter as **soluções numéricas**.

1.1 Soluções Não Construtivas

Um exemplo de solução que **não gera método construtivo** são as demonstrações de teoremas de *existência e unicidade* feitas por contradição. Este tipo de demonstração, geralmente, baseia-se na suposição da não existência de solução, ou de sua não unicidade, e nos conduz a uma contradição. Uma prova deste tipo evidentemente não nos fornece informações que nos possibilite *determinar a solução*. Apesar disso é de vital importância nos permitindo, de antemão, evitar a procura de soluções para problemas sem solução.

1.2 Soluções Construtivas

Vejam agora um exemplo de **método construtivo** para o cálculo de uma aproximação da raiz quadrada de um número real positivo maior do que 1.

Algoritmo de EUDOXO de Cnido

Seja p um número real positivo maior do que 1. Para determinar \sqrt{p} devemos determinar um número x de modo que $x^2 = p$.

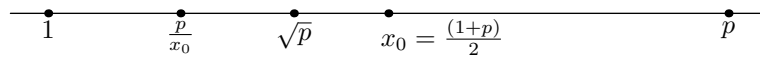


Figura 1.1:

Como $p > 1$ temos que $1 < \sqrt{p} < p$.

Escolhe-se então x_0 , primeira aproximação para \sqrt{p} , tomando-se a média aritmética entre 1 e p .

$\therefore x_0 := \frac{1}{2}(1 + p)$. (veja figura 1.1)

Pode-se mostrar que $p/x_0 < \sqrt{p} < x_0$.

Escolhe-se agora outra aproximação x_1 calculando a média aritmética entre x_0 e p/x_0

$x_1 := (x_0 + p/x_0)/2$

Temos novamente $p/x_1 < \sqrt{p} < x_1$.

Continuando deste modo podemos considerar a seqüência de aproximações sugerida por **Eudoxo** definida como:

$$x_n := \begin{cases} (1 + p)/2 & \text{se } n = 0 \\ (x_{n-1} + \frac{p}{x_{n-1}})/2 & \text{se } n \geq 1 \end{cases} \quad (1.1)$$

Vamos utilizar o algoritmo proposto acima para calcular algumas aproximações para $\sqrt{2}$.

Gracias por visitar este Libro Electrónico

Puedes leer la versión completa de este libro electrónico en diferentes formatos:

- HTML(Gratis / Disponible a todos los usuarios)
- PDF / TXT(Disponible a miembros V.I.P. Los miembros con una membresía básica pueden acceder hasta 5 libros electrónicos en formato PDF/TXT durante el mes.)
- Epub y Mobipocket (Exclusivos para miembros V.I.P.)

Para descargar este libro completo, tan solo seleccione el formato deseado, abajo:

