Universidade de São Paulo
Instituto de Física

Quantização Covariante de Sistemas Mecânicos

João Luis Meloni Assirati

Orientador: Prof. Dr. Dmitri Maximovitch Guitman

Tese de doutorado apresentada ao
Instituto de Física para a obtenção
do título de Doutor em Ciências.

Banca Examinadora

Prof. Dr. Dmitri Maximovitch Guitman (IF-USP)
Prof. Dr. Josif Frenkel (IF-USP)
Prof. Dr. Oscar José Pinto Éboli (IFUSP)
Prof. Dr. Andrei Bytsenko (UEL)
Prof. Dr. Jeferson de Lima Tomazelli (UFSC)

São Paulo
2010

FICHA CATALOGRÁFICA
Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Assirati, João Luis Meloni

Quantização covariante de sistemas mecânicos. – São Paulo, 2010.

Tese (Doutorado) – Universidade de São Paulo. Instituto de Física, Depto. de Física Nuclear

Orientador: Prof. Dr. Dmitri Maximovitch Guitman

Área de Concentração: Física

Unitermos: 1. Sistema quântico; 2.Teoria quântica relativística; 3. Física teórica; 4. Relatividade (Física); 5. Física matemática.

USP/IF/SBI-027/2010

Resumo

Estudamos as restrições impostas pelo princípio da covariância sobre o procedimento de quantização em espaços planos e curvos. Mostramos que o conjunto de todas as quantizações covariantes em espaços planos em coordenadas retangulares é composto de ordenamentos de operadores de posição e momento e exibimos uma parametrização funcional deste conjunto. Deduzimos regras para a quantização covariante em espaços planos em coordenadas gerais. Generalizamos estas quantizações para espaços curvos e mostramos que nestes espaços, além da ambiguidade de ordenamento, surge uma nova ambiguidade relacionada à curvatura. Este novo tipo de ambiguidade explica o surgimento de uma classe grande de "potenciais quânticos" no problema da quantização de uma partícula não relativística em um espaço curvo.

Abstract

We study the restrictions imposed by the covariance principle on the quantization procedure in flat and curved spaces. We show that the set of all covariant quantizations in flat spaces in rectangular coordinates is composed of position and momentum operator orderings and exhibit a functional parametrization of this set. We deduce rules for the covariant quantization in flat spaces in general coordinates. We generalize these quantizations for curved spaces and show that in such spaces, besides the ordering ambiguity, it appears a new ambiguity related to the curvature. This new kind of ambiguity explains the appearence of a wide class of "quantum potentials" in the problem of quantization of a non-relativistic particle in curved space.

Agradeço aos que tornaram possível a existência deste trabalho:

Ao meu orientador, Dmitri Maximovitch Gitman.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico – CNPq.

Aos meus pais, Emílio e Catarina.

Aos professores Josif Frenkel, Oscar José Pinto Éboli, Andrei Bytsenko e Jeferson de Lima Tomazelli, membros da banca examinadora.

Ao Instituto de Física da USP e seus funcionários.

Aos meus amigos, especialmente Rodrigo Fresneda e Suiane Inês da Costa Fernandes, Mário César Baldiotti, Arnaldo Gomes de Oliveira, Márcio Pinheiro Beck Eichler e Rosângela Aparecida Santos Eichler, Ivan Yasuda, Thiago dos Santos Pereira, Milton Alexandre da Silva Júnior e Ronaldo Carlotto Batista.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

O problema geral da quantização de um sistema físico clássico em um espaço de coordenadas (x, p), que consiste em associar operadores em um espaço de Hilbert adequado a funções do espaço de fase $F(x, p)$ (ver a seção 1.1) define um conjunto mínimo de propriedades cujo objetivo é assegurar que no limite clássico (quando o parâmetro $\hbar \to 0$) o sistema quantizado corresponda ao sistema clássico original. Havendo uma "perda de detalhamento" no processo limite $\hbar \to 0$, pode-se apenas esperar que o processo de quantização não seja unívoco mas, antes, a um dado sistema clássico correspondam muitos sistemas quânticos, todos consistentes com o mecanismo geral de quantização.

Esta ambigüidade se manifesta primariamente no bem conhecido problema de ordenamento de operadores na quantização canônica. De fato, se os operadores $\hat{x}$ e $\hat{p}$ obedecem às relações de comutação (1.2), à função clássica $F(x, p) = x^2p^2$ poderiam corresponder vários operadores: $\hat{F}_1 = \hat{x}\hat{p}^2\hat{x}$, $\hat{F}_2 = \hat{p}\hat{x}^2\hat{p}$, $\hat{F}_1 = \left(\hat{x}^2\hat{p}^2 + \hat{p}^2\hat{x}^2\right)/2$ etc. No entanto, tais ambuigüidades podem e devem ser resolvidas ou ao menos restringidas pela aplicação de outros princípios físicos. Neste trabalho, estudamos as restrições que o princípio de covariância impõe sobre as ambiguidades de ordenamento.

Começamos por definir o que significa covariância no contexto da quantização (seção 1.2). Definimos que sistemas quânticos derivados de um mesmo sistema clássico expresso em diferentes coordenadas (aqui, coordenadas sempre significarão as coordenadas x espaciais, e não coordenadas do espaço de fase (x, p)) devem se relacionar por um isomorfismo isométrico U que relaciona os espaços de Hilbert resultantes e, de forma consistente, os operadores. Desta maneira, operadores correspondentes à mesma função clássica em coordenadas diferentes possuirão o mesmo espectro. Esta discussão é fundamental para todo o trabalho e é importante, em particular, pelo fato de que é possível definir quantizações "ingênuas" para o problema da partícula livre não relativística em um espaço curvo (ou mesmo sem curvatura, mas em coordenadas gerais) que dependem do sistema de coordenadas usado [6]. Neste caso, obtém-se um espectro para o hamiltoniano que dependerá essencialmente do sistema de coordenadas usado.

Em seguida, aplicamos o conceito de quantização covariante a espaços planos em coordenadas retilíneas (espaços euclidianos ou pseudo-euclidianos). Nestes espaços, devido à simetria do grupo de rotações, covariância significa invariância de forma. Começamos por impor ao conceito geral de quantização algumas propriedades que permitem identificá-lo como um processo de ordenamento de operadores (seção 2.1). Com esta forma mais restrita, é possível aplicar o princípio de covariância obtendo uma forma parametrizada: as quantizações Q_ω estão em correspondência com uma medida complexa na reta real $\omega(\theta)$ (equação 2.26). Este resultado inclui o importante caso do ordenamento de Weyl, e explica e particulariza a forma (2.8) usada em [1]. Finalmente, apresentamos o resultado acima em coordenadas não retilíneas, com regras elementares, mas inéditas, de quantização em coordenadas não retilíneas (seção 2.6).

Em seguida, apresentamos uma generalização das quantizações Q_ω a espaços com curvatura. O trabalho até o momento focalizou-se no problema da "quantização canônica" de uma partícula em um espaço riemanniano sem propriedades topológicas especiais (essencialmente, um aberto do $\mathbb{R}^D$ com um tensor métrico). Esta generalização é feita em duas etapas. Primeiro, é definida a quantização $Q_{\omega,1}$ (seção 3.1), que é formalmente idêntica à quantização em um espaço plano em coordenadas gerais. A regra resultante é a substituição das derivadas comuns por derivadas covariantes na expressão dos operadores em representação da posição. O cálculo do elemento de matriz de um operador segundo esta quantização revela uma função $\mathcal{M}(x,\xi)$ que é identicamente igual a 1 se o espaço não tem curvatura (mesmo que sejam usadas coordenadas gerais). Tal função revela uma ambiguidade de quantização extra quando estamos em um espaço curvo. Sua substituição, no processo de quantização, por outra função $\mathcal{F}(x,\xi)$ com as mesmas propriedades (seção 3.5) leva à definição de novas quantizações $Q_{\omega,\mathcal{F}}$ (seção 3.6), que incluem não só ambiguidades de ordenamento (no parâmetro ω) como também relativas à curvatura (parâmetro $\mathcal{F}$). As relações entre todos os símbolos de operadores relacionados às quantizações $Q_{\omega,\mathcal{F}}$ são calculadas (generalizando os resultados de [10, 9]) e o limite clássico é demonstrado (seção 3.8). A quantização $Q_{\omega,\mathcal{F}}$ inclui várias quantizações usadas em [2, 3, 4, 5], que em geral consideraram apenas o caso de Weyl ($\omega(\theta)=\delta(\theta)$).

Finalmente, este resultado é aplicado ao velho problema da partícula não relativística livre em um espaço curvo (3.9). Mostrou-se que tal sistema não tem ambiguidade de ordenamento (sua quantização é independente de ω) mas depende da escolha de $\mathcal{F}$. De fato, sempre é possível escolher uma função $\mathcal{F}(x,\xi)$ de modo a obter um potencial quântico de forma geral $f(R)$ (onde $R(x)$ é o escalar de curvatura e $f(R) \to 0$ quando $R \to 0$). Em particular, o resultado de [7] e [8] é reproduzido se usamos $\mathcal{F} = \mathcal{M}$.

1.1 Definição geral de quantização

Nesta seção, será dada uma definição geral de quantização a título de referência para as seções que seguem.

Seja dado um sistema clássico descrito em um espaço de fase $2D$ dimensional de variáveis $\left(x^1, x^2, \ldots x^D, p_1, p_2, \ldots p_D\right) = (x,p)$ sem vínculos, isto é, cuja dinâmica é dada em termos dos parênteses de Poisson

$$\{F,G\} = \sum_{\mu=1}^{D}\left(\frac{\partial F}{\partial x^\mu}\frac{\partial G}{\partial p_\mu} - \frac{\partial F}{\partial p_\mu}\frac{\partial G}{\partial x^\mu}\right).$$

Uma quantização Q deste sistema é uma correspondência entre as funções clássicas complexas $F = F(x,p)$ e operadores $\hat{F} = Q(F)$ em um espaço de Hilbert $\mathcal{R}$. Esta correspondência deve obedecer a algumas propriedades, listadas a seguir.

1. Q deve ser linear e injetiva, ou seja, $Q(\alpha F + \beta G) = \alpha Q(F) + \beta Q(G)$, onde α e β são números complexos, e $F \neq G \Rightarrow Q(F) \neq Q(G)$.

2. Se $F(x,p)$ é uma função complexa, então $(Q(F))^\dagger = Q(F^*)$, onde * denota o complexo conjugado. Esta condição implica que, se F é real, então $(Q(F))^\dagger = Q(F)$, ou seja, $Q(F)$ é um operador auto-adjunto[1]

3. A quantização da função constante igual a 1 deve ser o operador identidade $\hat{I}$, $Q(1) = \hat{I}$. A quantização das funções x^μ e p_μ devem ser operadores

$$Q(x^\mu) = \hat{x}^\mu \text{ e } Q(p_\mu) = \hat{p}_\mu \tag{1.1}$$

(auto-adjuntos os, pela proprieade 2) que obedeçam às relações canônicas de comutação

$$[\hat{x}^\mu, \hat{x}^\nu] = [\hat{p}_\mu, \hat{p}_\nu] = 0,\ [\hat{x}^\mu, \hat{p}_\nu] = i\hbar\delta^\mu_\nu, \tag{1.2}$$

[1]A hipótese mais simples de que $(Q(F))^\dagger = Q(F)$ quando F é real é equivalente à propriedade 2. De fato, usando esta hipótese mais simples e a propriedade 1, seja $F = G + iH$ complexa, com G e H reais, então $(Q(F))^\dagger = (Q(G) + iQ(H))^\dagger = Q(G) - iQ(H) = Q(F^*)$