RECONSTRUÇÃO MELHORADA DE DADOS DE RESSONÂNICA MAGNÉTICA USANDO APROXIMAÇÃO DE ORDEM BAIXA BASEADA EM DECOMPOSIÇÃO POR VALORES SINGULARES

Davi Marco Lyra-Leite, João Paulo C. Lustosa da Costa, e João L. A. Carvalho

Grupo de Processamento Digital de Sinais (GPDS)
Departmento de Engenharia Elétrica / Universidade de Brasília, Brasília–DF, Brasil

E-mail: davi@ieee.org, joaopaulo.dacosta@ene.unb.br, e joaoluiz@pgea.unb.br

Abstract: The reconstruction of magnetic resonance imaging (MRI) data can be a computationally demanding task. Signal-to-noise ratio is also a concern, specially in high-resolution imaging. Data compression may be useful not only for reducing reconstruction complexity and memory requirements, but also for reducing noise, as it is capable of eliminating spurious components. This work proposes the use of SVD-based low-rank approximation for the reconstruction and denoising of MRI data. The Akaike information criterion is used to estimate the appropriate model order. The model order is used to remove noisy components and to reduce the amount of data to be stored and processed. The proposed method is evaluated using *in vivo* MRI data. We present images reconstructed using less than 20% of the original data size and with a similar quality in terms of visual inspection. A quantitative evaluation is also presented.

***Palavras-chave*: decomposição em valores singulares; aproximação por matriz de baixo posto; ressonância magnética; redução de ruído em imagens médicas.**

Introdução

A ressonância magnética nuclear (RMN) de tecidos humanos vivos começou na década de 1970. Por ser uma técnica muito recente, a RMN é uma área muito profícua de pesquisa nos campos de engenharia biomédica e processamento de sinais [1]. O processo geral de aquisição e reconstrução de dados de RMN está ilustrado na Figura 1. A aquisição da imagem pode usar uma ou mais bobinas, diferentes sequências de pulsos e formatos de gradientes, sendo essa uma área de intensa pesquisa e trabalho. Os dados adquiridos correspondem à transformada de Fourier da imagem, $A(k_x,k_y)$, que também são chamados de dados no espaço-*k*. A imagem é obtida usando algoritmos de reconstrução, que normalmente se baseiam na transformada inversa de Fourier.

A decomposição em valores singulares (*singular value decomposition*, ou SVD) é uma técnica conhecida de compressão de dados [2], bem como de remoção de ruído [3]. Algumas aplicações já foram demonstradas para RMN em reconstrução de dados [4] e remoção de ruído [3]. Em sistemas de aquisição com vários canais, a SVD pode ser utilizado para compressão dos dados das bobinas, a fim de trabalhar com menos matrizes durante a reconstrução [5]. Aproximações baseadas em redução de ordem a partir de SVD podem ser aplicadas tanto antes do processo de reconstrução das imagens — trabalhando com os dados no espaço-*k* — como depois da reconstrução — lidando com as imagens e visando reduzir a quantidade de memória necessária para o armazenamento.

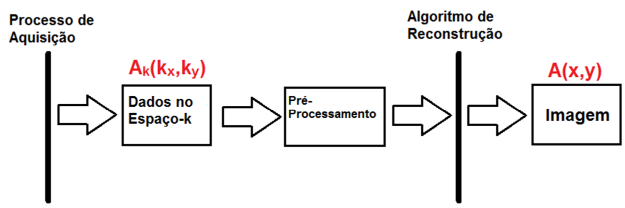

Figura 1: Processo de aquisição e reconstrução de dados de RMN.

Este artigo propõe o uso da seleção de ordem de modelo, bem como da aproximação por matriz de baixo posto, para reconstrução de dados de RMN, baseados no critério de informação de Akaike e decomposição por valores singulares. Usando a seleção de ordem de modelo, é possível calcular o número de componentes necessários para representar os dados de RMN. Então, uma aproximação de valores singulares de baixo posto é utilizada para reconstruir a imagem de RMN, a partir de um número menor de componentes. Com o intuito de validar essa técnica, as reconstruções no domínio da imagem e no espaço-*k* são avaliadas e comparadas por meio da razão sinal-erro (*signal-to-error ratio*, ou SER) e por inspeção visual. Os resultados aqui apresentados foram originalmente apresentados no *IEEE Workshop on Engineering Applications*, realizado em Bogotá, Colômbia, em maio de 2012 [6].

Formulação Matemática

Nesta seção são apresentados os fundamentos teóricos da reconstrução de imagens de RMN e da decomposição em valores singulares.

Ressonância magnética nuclear – O sinal de ressonância magnética adquirido em um dado instante no tempo *t* corresponde a uma amostra da transformada de Fourier $A(k_x,k_y)$ da imagem $A(x,y)$, a saber,

$$A(k_x, k_y) = \int_x \int_y A(x,y) e^{-j2\pi(k_x x + k_y y)} dxdy, \quad (1)$$

em que as coordenadas de Fourier são dadas por

$$k_x = \frac{\gamma}{2\pi}\int_0^t G_x(\tau)d\tau, \quad (2)$$
$$k_y = \frac{\gamma}{2\pi}\int_0^t G_y(\tau)d\tau, \quad (3)$$

onde γ é a razão giromagnética (para os prótons de hidrogênio $\gamma = 42{,}57$ MHz/T), e $G_x(t)$ e $G_y(t)$ são os gradientes variantes no tempo ao longo dos eixos x e y, respectivamente.

A imagem $A(x,y)$ é reconstruída utilizando-se a transformada inversa bidimensional de Fourier ao longo de k_x e k_y. Os dados no espaço-*k* são valores digitais e reconstruídos no computador. Assim, a imagem de RMN reconstruída corresponde a uma matriz de dados em escala de cinza, *A*.

Decomposição em Valores Singulares – Considerando-se o sinal correspondente à imagem, que é usualmente uma matriz de tamanho *M* por *N*, é possível obter os seus valores e vetores singulares de acordo com:

$$A = USV^T, \quad (4)$$
$$= \sum_{i=1}^{N} \sigma_i u_i v_i^H, \quad (5)$$

em que *U* é uma matriz *M* por *M*, *S* é uma matriz diagonal *M* por *N* e *V* é uma matriz *N* por *N*. Considerando que o posto da matriz *A* é *r* e que $M \geq N$, então $r \leq N$. A equação (4) descreve a decomposição de *A* [7,8].

As colunas de *U* são chamadas vetores singulares à esquerda, $\{u_k\}$, as linhas de V^T correspondem aos vetores singulares à direita, $\{v_k\}$ e os elementos da matriz *S* são chamados de valores singulares. Além disso, $s_K > 0$ para $1 \leq K \leq r$, enquanto que $s_i = 0$ para $(r+1) \leq i \leq N$. Os valores singulares são organizados do maior para o menor. Com essa formulação, os valores singulares que apresentam os menores índices são aqueles que correspondem aos componentes mais importantes do sinal. Portanto, é possível aplicar um algoritmo para descobrir a ordem do modelo que representa esse sinal, possibilitando reduzir o número de componentes das matrizes *U*, *S* e *V*, mas obtendo os dados sem perdas de informação em relação ao conjunto original e, possivelmente, reduzindo o nível de ruído [8].

Modelo Proposto

O modelo proposto visa o uso de esquemas de decomposição baseados nas estatísticas do sinal para a redução dos elementos nas matrizes usadas na reconstrução e, com isso, diminuir a quantidade de dados a se trabalhar e armazenar.

Na matriz de valores singulares, é possível identificar a ordem do modelo e com isso aplicar um algoritmo que trabalhe apenas com a informação relevante à caracterização do sinal e, dessa forma, propicie redução do nível de ruído. O número de componentes a serem utilizados para reconstrução do sinal foi definido a partir do critério de informação de Akaike (AIC) [9].

Critério de Informação de Akaike – O critério de informação de Akaike é usado para selecionar o número necessário de componentes que descreve um sinal sem perda de informação. Ele é um critério matemático baseado em teoria da informação, em que dentre um determinado conjunto de candidatos de modelos para os dados, o modelo preferencial será aquele que minimize o valor de AIC, dado por:

$$AIC = 2k - 2\ln(L), \quad (6)$$

onde k é o número de parâmetros do modelo estatístico e L é o valor maximizado da função de verossimilhança para o modelo estimado [9,10].

Na análise proposta, o número AIC é calculado de acordo com [11]:

$$AIC = -N \cdot (M-m) \cdot \log\left(\frac{g(m)}{a(m)}\right) + m \cdot (2M-m), \quad (7)$$

em que *M* e *N* correspondem ao tamanho da imagem, *m* é o número de componentes selecionados — logo o valor que deve ser encontrado de forma a minimizar a expressão —, $g(m)$ é a média geométrica dos *m* menores autovalores dos dados e $a(m)$ é a média aritmética dos *m* menores autovalores. Note que o quadrado dos valores singulares correspondem aos autovalores utilizados em na equação (7).

Depois de encontrar o valor de *m* que minimiza a equação (7), é possível encontrar a ordem do modelo a qual fornecerá o número mínimo de componentes que corretamente representam o sinal. Isso possibilita descartar as outras componentes, que passam a ser considerados ruidosas.

Aplicação da Seleção de Ordem para a aproximação do Sinal por Valores Singulares – Após encontrar a ordem do modelo que descreve o sinal, é possível reduzir as matrizes dos valores singulares e dos vetores singulares, selecionando apenas os elementos que corretamente descrevem o sinal. Para uma matriz *A* de tamanho *M* por *N*, inicialmente descrita na equação (4) — em que $U_{M\times M}$, $S_{M\times N}$ e $V_{N\times N}$ —, então, se a ordem do modelo é dada por D ($1 \leq D \leq \min(M,N)$), é possível utilizar apenas os D valores singulares mais altos e os primeiros D vetores singulares à direita e à esquerda para representar o conjunto original de dados. Assim:

$$A = U_S S_S V_S^D, \quad (8)$$
$$= \sum_{i=1}^{D} \sigma_i u_i v_i^H, \quad (9)$$