Prefácio

O conteúdo deste livro é o mesmo das 10 aulas que foram dadas pelos autores a professores que atuam no Ensino Médio no Rio de Janeiro, em janeiro de 2001.

O curso durou uma semana, com duas aulas em cada manhã enquanto as tardes eram dedicadas à resolução e a discussão em conjunto dos exercícios propostos.

Todos os problemas aqui apresentados têm respostas completas no final.

A Sociedade Brasileira de Matemática dispõe de um conjunto de 10 vídeos nos quais estão gravadas, ao vivo, as aulas. As pessoas e instituições interessadas na aquisição dos mesmos podem dirigir-se à SBM nos endereços que constam no presente volume.

Ao pôr este material à disposição dos professores e estudantes universitários que se preparam para o exercício do magistério, a intenção dos autores é a de destacar alguns temas usualmente estudados no Ensino Médio, mostrando que, ao lado de sua conceituação apropriada, eles podem ser ilustrados por meio de problemas simples, acessíveis, porém desafiadores e contextuais. Evidentemente, trata-se de uma pequena amostra, indicando um fértil e atraente caminho a ser trilhado.

Mais uma vez, as atividades que realizamos, o livro publicado e os vídeos gravados devem sua existência em grande parte a VITAE, ao IMPA e à SBM. A estas notáveis instituições, o agradecimento dos autores.

Rio de Janeiro, junho de 2001

Elon Lages Lima
Paulo Cezar P. Carvalho
Eduardo Wagner
Augusto César Morgado

Capítulo 1

Proporcionalidade e Funções Afins

Em seu livro "Elementos de Álgebra", publicado em São Petersburgo em 1770, o grande matemático Leonardo Euler propõe o seguinte problema:

> Uma lebre está 50 pulos à frente de um cachorro, o qual dá 3 pulos no tempo que ela leva para dar 4. Sabendo que 2 pulos do cachorro valem 3 da lebre, quantos pulos ele deve dar para pegá-la?

Este é um exemplo de questão que se refere a proporcionalidade, assunto que exporemos a seguir.

1 Proporcionalidade

Diz-se que duas grandezas são *proporcionais* quando existe uma correspondência $x \mapsto y$, que associa a cada valor x de uma delas um valor y bem definido da outra, de tal modo que sejam cumpridas as seguintes condições:

1) Quanto maior for x, maior será y. Em termos matemáticos: se $x \mapsto y$ e $x' \mapsto y'$ então $x < x'$ implica $y < y'$.

2) Se dobrarmos, triplicarmos, etc. o valor de x então o valor correspondente de y será dobrado, triplicado, etc. Na linguagem matemática: se $x \mapsto y$ então $nx \mapsto ny$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Nas condições acima, a correspondência $x \mapsto y$ chama-se uma *proporcionalidade*.

Exemplo 1. Sejam x o volume e y o peso de uma porção de um líquido homogêneo. A correspondência $x \mapsto y$ cumpre claramente as duas condições acima, logo o volume é proporcional ao peso.

Exemplo 2. Sejam r e s retas paralelas. Dado qualquer retângulo que tenha dois lados contidos nessas retas, chamemos de x o comprimento de um desses lados e z a área do retângulo.

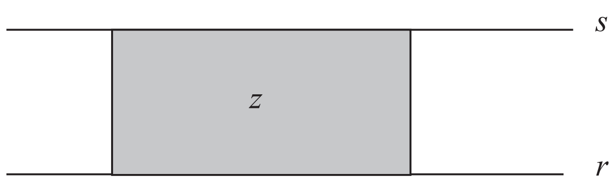

Figura 1

A correspondência $x \mapsto z$ é uma proporcionalidade. Ou seja: quando a altura de um retângulo é fixada, sua área z é proporcional à base x.

Com efeito, em primeiro lugar, se $x < x'$ então a área z' do retângulo de base x' é igual à área z do retângulo de base x mais a área de um retângulo de base $x' - x$, logo $z < z'$.

Em segundo lugar, um retângulo de base $n \cdot x$ pode ser expresso como reunião de n retângulos justapostos de base x (e mesma área z) logo sua área é $n \cdot z$.

Observação. A afirmação contida no Exemplo 2 é uma conseqüência imediata da fórmula que exprime a área de um retângulo como o produto da base pela altura. Esta é, entretanto, uma justificativa a posteriori. Não é conveniente usá-la no presente contexto pois, na verdade, o primeiro passo da dedução daquela fórmula é a verificação da proporcionalidade acima.

Exemplo 3. Consideremos no plano um ângulo $A\widehat{O}B$ e uma reta r que não é paralela ao lado OA nem a OB (Figura 2). Dado qualquer segmento de reta de comprimento x, contido em OA, as paralelas a r traçadas por suas extremidades determinam sobre o lado OB um segmento de comprimento y.

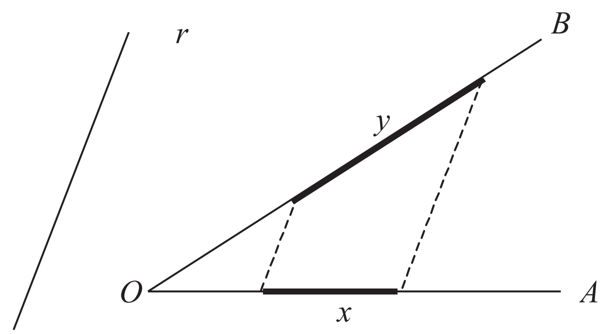

Figura 2

Afirmamos que a correspondência $x \mapsto y$ é uma proporcionalidade.

Antes de justificar esta afirmação devemos mostrar que o comprimento y depende apenas do comprimento x mas não da posição do segmento tomado sobre o lado OA. (Isto significa que a correspondência $x \mapsto y$ está bem definida.)

Ora, se tomarmos sobre o lado OA dois segmentos de mesmo comprimento x então na Figura 3, onde MN e $M'N'$ são paralelos a OA, os triângulos MNP e $M'N'P'$ têm, cada um, um lado de mesmo comprimento x, compreendido entre dois ângulos $\widehat{M} = \widehat{M'}$ e $\widehat{N} = \widehat{N}'$. Logo são triângulos congruentes e daí $\overline{MP} = \overline{M'P'} = y$.

A partir desta observação inicial, sempre que tivermos $x \mapsto y$ e $x' \mapsto y'$, se quisermos comparar y com y' podemos supor que x e x' são medidas de segmentos com origem no vértice O. Então fica claro que se $x < x' \Rightarrow y < y'$ e que $x' = n \cdot x \Rightarrow y' = n \cdot y$, como mostra a Figura 4 (onde $n = 3$).

Exemplo 4. Investindo uma quantia x numa caderneta de poupança, após o decurso de um mês obtém-se um montante y. A correspondência $x \mapsto y$ é uma proporcionalidade: o que se recebe no fim do mês é proporcional ao que se aplicou. Com efeito, é claro que aplicando-se mais recebe-se mais e investindo-se uma quantia n vezes maior do que x, pode-se considerar essa operação como n investimentos iguais a x, logo o que se recebe é $n \cdot y$.

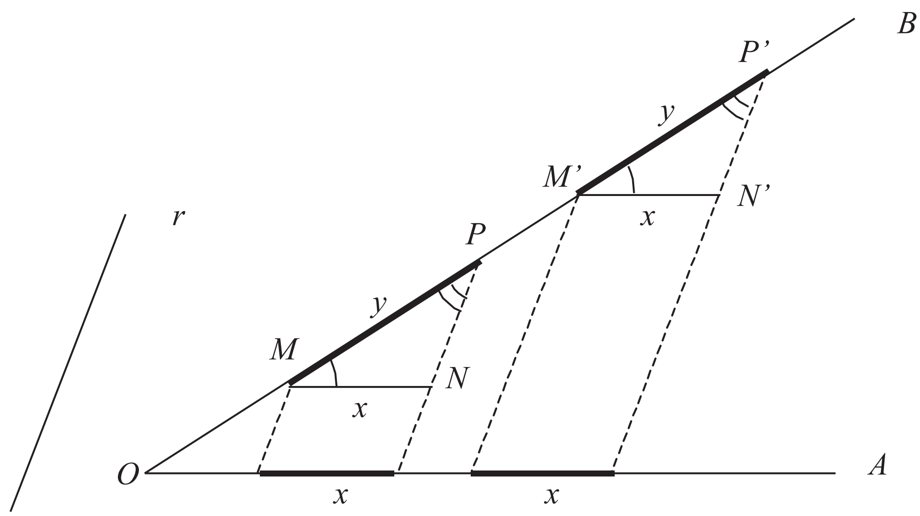

Figura 3

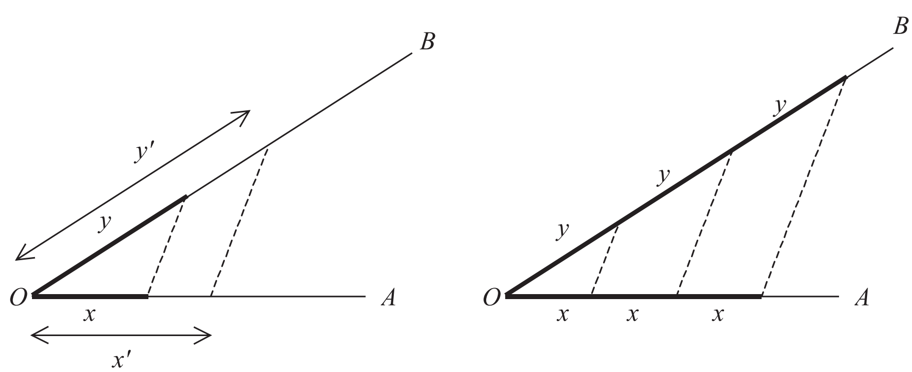

Figura 4

Observação. Se uma quantia fixa gera, após um mês de investimento, um retorno y, não é verdade que após n meses essa mesma quantia gere o retorno $n \cdot y$, mesmo que a taxa de juros permaneça constante. Pois ao final de cada mês é como se tivesse sido aplicada novamente uma quantia maior, igual à existente no mês anterior mais os juros correspondentes. Assim o retorno (num período fixo) é proporcional ao capital inicial mas não é proporcional ao tempo de investimento.

Esta observação mostra que a propriedade "quanto maior for x, maior será y" não assegura a proporcionalidade entre x e y. Outro exemplo disto é a correspondência $x \mapsto y$, onde x é o lado de um quadrado e y é sua área.

Diante dos exemplos anteriores, podemos formular a definição matemática de proporcionalidade, onde as grandezas são substituídas por números reais, que são suas medidas.

Estamos considerando apenas grandezas que têm medida positiva, logo o modelo matemático da proporcionalidade leva em consideração apenas números reais positivos.

Uma proporcionalidade (numérica) é uma função $f \colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ com as seguintes propriedades:

1) f é uma função crescente, isto é $x < x' \Rightarrow f(x) < f(x')$ para quaisquer $x, x' \in \mathbb{R}^+$.
2) Para todo $x \in \mathbb{R}^+$ e todo $n \in \mathbb{N}$ tem-se $f(nx) = n \cdot f(x)$.

Numa proporcionalidade a propriedade 2), acima admitida apenas quando $n \in \mathbb{N}$, vale para um número real positivo qualquer. Este é o conteúdo do

Teorema Fundamental da Proporcionalidade.
Se $f \colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *é uma função crescente tal que* $f(nx) = n \cdot f(x)$ *para todo* $x \in \mathbb{R}^+$ *e todo* $n \in \mathbb{N}$, *então* $f(cx) = c \cdot f(x)$ *para quaisquer* x *e* c *em* $\mathbb{R}^+$.

A demonstração do teorema acima está no Apêndice 1 na pág. 16. Ver também os seguintes livros, publicados pela S.B.M.: "Meu

Professor de Matemática", pág. 129, e "A Matemática do Ensino Médio, vol. 1", pág. 94.

Na prática, é bem mais fácil mostrar que $f(nx) = n \cdot f(x)$ para $n \in \mathbb{N}$ do que verificar que $f(cx) = c \cdot f(x)$ para todo $c \in \mathbb{R}^+$. (Pense em $c = \sqrt{2}$ ou $c = \pi$.) Por outro lado, o fato de que uma proporcionalidade f satisfaz esta igualdade para qualquer número real positivo c tem importantes conseqüências, como veremos agora.

Corolário. *Se* $f \colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *é uma proporcionalidade então tem-se, para todo* $x > 0$, $f(x) = ax$, *onde* $a = f(1)$.

Com efeito, pelo Teorema Fundamental, para quaisquer $x, c \in \mathbb{R}^+$, vale $f(xc) = x \cdot f(c) = f(c) \cdot x$. Em particular, tomando $c = 1$, obtemos $f(x) = a \cdot x$, onde $a = f(1)$.

Uma função $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax$, onde $a \in \mathbb{R}$ é uma constante, chama-se uma *função linear*. Quando $a > 0$, a função linear $f(x) = ax$ transforma um número real positivo x no número positivo ax, logo define, por restrição, uma proporcionalidade $f \colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$. Acabamos de ver que, reciprocamente, toda proporcionalidade é a restrição de uma função linear a $\mathbb{R}^+$. O coeficiente a chama-se o *fator de proporcionalidade*.

Esta última observação nos permite concluir que se $f \colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ é uma proporcionalidade então, para quaisquer x_1, x_2 com $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2$, tem-se $y_1/x_1 = y_2/x_2$. Com efeito, ambos esses quocientes são iguais ao fator de proporcionalidade a. A igualdade $y_1/x_1 = y_2/x_2$ chama-se uma *proporção*.

Chama-se *regra de três* ao problema que consiste em, conhecendo três dos números x_1, y_1, x_2, y_2, determinar o quarto.

Há duas maneiras tradicionais de resolver esse problema. Suponhamos dados x_1, y_1 e x_2. O quarto elemento da proporção será chamado y. Então deve ser $y_1/x_1 = y/x_2$, donde se tira $y = x_2 y_1/x_1$. Esta é uma forma de resolver a regra de três.

O outro método de resolver a regra de três chama-se "redução à unidade". Sabendo que $f(x_1) = y_1$, ou seja, $ax_1 = y_1$, obtemos $a = y_1/x_1$ e daí vem o valor do termo y que falta na proporção $y_1/x_1 = y/x_2$: $y = f(x_2) = ax_2 = y_1 x_2/x_1$. O nome "redução à unidade" provém do fato de que $a = f(1)$ é o valor de $f(x)$ quando $x = 1$.

Deve-se ressaltar enfaticamente que a regra de três, proveniente da proporção $y_1/x_1 = y/x_2$, só pode ser legitimamente empregada quando se tem uma proporcionalidade f, sendo $y_1 = f(x_1)$ e $y = f(x_2)$.

Outra observação a ser feita é que, em diversas situações onde se usa a proporcionalidade (ou a regra de três), o fator de proporcionalidade a é irrelevante e/ou complicado de se obter.

No Exemplo 1, o fator de proporcionalidade $a =$ peso / volume, chamado a *densidade* do líquido (ou, mais precisamente, o *peso específico*), é um conceito útil. Assim, peso = densidade × volume.

No Exemplo 3, o fator de proporcionalidade não tem a menor importância. (Por acaso ele é o quociente dos senos dos ângulos que a reta r forma com os lados OA e OB, mas esta informação é uma mera curiosidade.)

No Exemplo 4, é costume escrever o fator de proporcionalidade sob a forma $a = 1 + i$, portanto tem-se $y = (1 + i)x$. O número i chama-se o *juro*. Se o investimento inicial x for mantido durante n mêses e os juros se mantiverem fixos, tem-se ao final do n-ésimo mês $y = (1 + i)^n x$.

Quanto ao Exemplo 2, ele nos diz que a área z de um retângulo de altura fixa y (= distância entre as paralelas r e s) é proporcional à base x, logo $z = A \cdot x$, onde o fator de proporcionalidade A é a área do retângulo de mesma altura y e base 1. Mas é claro que o que vale para a base vale também para a altura. Logo, a área A de um retângulo de base 1 e altura y é proporcional a y, ou seja, $A = B \cdot y$, onde B é a área do retângulo de base 1 e altura 1. Ora, este é o quadrado unitário logo, por definição, $B = 1$. Assim $A = y$ e a área z do retângulo de base x e altura y é dada por $z = xy$. (Veja o livro "Medida e Forma em Geometria", pág. 17.)

Existe também a noção de proporcionalidade inversa. Diz-se que duas grandezas são *inversamente proporcionais* quando existe uma correspondência $x \mapsto y$ que associa a cada valor x de uma delas um valor bem definido y da outra, de tal modo que sejam cumpridas as seguintes condições:

1) Quanto maior for x, menor será y. Em termos matemáticos: se $x \mapsto y$ e $x' \mapsto y'$ então $x < x' \Rightarrow y' < y$.
2) Se dobrarmos, triplicarmos, etc. o valor de x então o valor correspondente de y será dividido por dois, por três, etc. Em linguagem matemática: se $x \mapsto y$ então $nx \mapsto y/n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Portanto, dizer que y é inversamente proporcional a x equivale a dizer que y é proporcional a $1/x$. Segue-se então do Teorema Fundamental da Proporcionalidade que se y é inversamente proporcional a x então tem-se $y = a/x$, onde o fator de proporcionalidade a é o valor de y que corresponde a $x = 1$.

Exemplo 5. Entre os retângulos de base x, altura y e área igual a 1, tem-se y inversamente proporcional a x, com $y = 1/x$.

2 Grandeza proporcional a várias outras

Em muitas situações tem-se uma grandeza z, de tal modo relacionada com outras, digamos x, y, u, v, w, que a cada escolha de valores para estas últimas corresponde um valor bem determinado para z. Então z chama-se uma *função* das variáveis x, y, u, v, w e escreve-se $z = f(x, y, u, v, w)$.

Nestas condições, diz-se que z é (diretamente) *proporcional* a x quando:

1) Para quaisquer valores fixados de y, u, v, w, a grandeza z é uma função crescente de x, isto é, a desigualdade $x < x'$ implica $f(x, y, u, v, w) < f(x', y, u, v, w)$.
2) Para $n \in \mathbb{N}$ e x, y, u, v, w quaisquer tem-se $f(nx, y, u, v, w) = n \cdot f(x, y, u, v, w)$.

Analogamente, diz-se que z é *inversamente proporcional* a x quando:

1') Para quaisquer valores fixados de y, u, v e w, a grandeza z é uma função decrescente de x, isto é, a desigualdade $x < x'$ implica $f(x, y, u, v, w) > f(x', y, u, v, w)$.

2') Para $n \in \mathbb{N}$ e x, y, u, v, w quaisquer tem-se $f(nx, y, u, v, w) = \frac{1}{n} \cdot f(x, y, u, v, w)$.

Segue-se do Teorema Fundamental da Proporcionalidade que as propriedades 2) e 2') acima valem para $c > 0$ real qualquer em lugar de $n \in \mathbb{N}$. Isto tem a seguinte conseqüência:

> Se $z = f(x, y, u, v, w)$ é (diretamente) proporcional a x e y e inversamente proporcional a u, v e w então, tomando-se $a = f(1, 1, 1, 1)$, tem-se
>
> $$f(x, y, u, v, w) = a \cdot \frac{x \cdot y}{u \cdot v \cdot w} \cdot$$

Com efeito,

$$\begin{aligned} f(x, y, u, v, w) &= f(x \cdot 1, y, u, v, w) = x \cdot f(1, y, u, v, w) \\ &= xy \cdot f(1, 1, u, v, w) = \frac{xy}{u} \cdot f(1, 1, 1, v, w) \\ &= \frac{xy}{uv} \cdot f(1, 1, 1, 1, w) = \frac{xy}{uvw} \cdot f(1, 1, 1, 1, 1) \\ &= a \cdot \frac{xy}{uvw} \cdot \end{aligned}$$

Exemplo 6. A lei da gravitação universal, de Newton, afirma que dois corpos, de massas m e m' respectivamente, situados a uma distância d um do outro, se atraem segundo uma força cuja intensidade F é proporcional a essas massas e inversamente proporcional ao quadrado d^2 da distância entre eles. Resulta do acima exposto que $F = c \cdot \frac{mm'}{d^2}$, onde a constante c depende do sistema de unidades utilizado.

Exemplo 7. A noção de grandeza proporcional a várias outras permite deduzir a fórmula do volume de um bloco retangular. O volume de um sólido geométrico X, que se escreve vol(X), é um número real com as seguintes propriedades:

1) Se o sólido X está contido propriamente no sólido X' então vol(X) < vol(X').