

Teoria isomorfa dos espaços de Banach
 $C_0(K, X)$

Leandro Candido Batista

TESE APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO TÍTULO
DE
DOUTOR EM CIÊNCIAS

Programa: Matemática
Orientador: Prof. Dr. Elói Medina Galego

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro
do CNPq (processo 142423/2011-4) e da CAPES

São Paulo, Novembro de 2012

Teoria isomorfa dos espaços de Banach

$C_0(K, X)$

Esta tese contém as correções e alterações sugeridas pela Comissão Julgadora durante a defesa realizada por Leandro Candido Batista em 12/11/2012.

O original encontra-se disponível no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo.

Comissão Julgadora:

- Prof. Dr. Elói Medina Galego - IME-USP
- Prof. Dr. Valentin Raphael Henri Ferenczi - IME-USP
- Prof. Dr. Jorge Tulio Mujica Ascui - UNICAMP
- Prof. Dr. Antonio Roberto da Silva - UFRJ
- Prof. Dr. Leandro Fiorini Aurichi - ICMC-USP

Agradecimentos

Ao longo deste trabalho muitos foram os que de alguma forma me ajudaram e encorajaram a alcançar o seu término. Por essa razão, desejo expressar os meus sinceros agradecimentos:

Ao Professor Doutor Elói Medina Galego, meu orientador, pela competência científica, pela disponibilidade, pela amizade e generosidade reveladas ao longo deste período.

Aos membros da Comissão Julgadora pelas valiosas sugestões que contribuíram de forma significativa para o enriquecimento deste trabalho.

À minha amada esposa, Rita Cavalcanti, pelo inestimável apoio familiar, pela paciência e compreensão reveladas ao longo destes anos.

À minha família, meus pais Joaquim e Vera e meu irmão Leonardo, pelo enorme carinho e incentivo.

Ao Professor Doutor Daniel Victor Tausk pela valiosa ajuda sanando minhas inúmeras dúvidas sempre com brilhantismo e bom humor.

Aos Professores, Aleksander Pełczyński, Yoav Benyamini e Krzysztof Jarosz, por suas inestimáveis opiniões, sugestões e interesse pelo trabalho.

Aos grandes amigos, André Pierro de Camargo, Cesar Adriano Batista e Renato Alessandro Martins, pelo apoio.

Ao Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo pela oportunidade.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior, CAPES, e ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, CNPq, pelo apoio financeiro.

Mais uma vez, a todos os meus sinceros agradecimentos.

Resumo

Para um espaço localmente compacto de Hausdorff K e um espaço de Banach X , denotamos por $C_0(K, X)$ o espaço de todas as funções a valores em X contínuas sobre K que se anulam no infinito, munido da norma do supremo. No espírito do clássico teorema de Banach-Stone 1937, estabelecemos que se $C_0(K_1, X)$ é isomorfo a $C_0(K_2, X)$, onde X é um espaço de Banach de cotipo finito e tal que X é separável ou X^* tem a propriedade de Radon-Nikodým, então ou K_1 e K_2 são ambos finitos ou K_1 e K_2 tem a mesma cardinalidade. Trata-se de uma extensão vetorial de um resultado de Cengiz 1978, o caso escalar $X = \mathbb{R}$ ou $X = \mathbb{C}$.

Demonstramos também que se K_1 e K_2 são intervalos compactos de ordinais e X é um espaço de Banach de cotipo finito, então a existência de um isomorfismo T de $C(K_1, X)$ em $C(K_2, X)$ com $\|T\|\|T^{-1}\| < 3$ implica que uma certa soma topológica finita de K_1 é homeomorfa a alguma soma topológica finita de K_2 . Mais ainda, se X^n não contém subespaço isomorfo a X^{n+1} para todo $n \in \mathbb{N}$, então K_1 é homeomorfo a K_2 . Em outras palavras, obtemos um teorema tipo Banach-Stone vetorial que é uma extensão de um teorema de Gordon de 1970 e ao mesmo tempo uma extensão de um teorema de Behrends e Cambern de 1988. Mostramos que se existe um isomorfismo T de $C(K_1)$ em um subespaço de $C(K_2, X)$ com $\|T\|\|T^{-1}\| < 3$, então a cardinalidade do α -ésimo derivado de K_2 ou é finita ou é maior do que a cardinalidade do α -ésimo derivado de K_1 , para todo ordinal α .

Em seguida, seja n um inteiro positivo, Γ um conjunto infinito munido da topologia discreta e X um espaço de Banach de cotipo finito. Estabelecemos que se o n -ésimo derivado de K for não vazio, então a distância de Banach-Mazur entre $C_0(K, X)$ e $C_0(\Gamma, X)$ é maior ou igual a $2n + 1$. Também demonstramos que para quaisquer inteiros positivos n e k , a distância de Banach-Mazur entre $C([1, \omega^n k], X)$ e $C_0(\mathbb{N}, X)$ é exatamente $2n + 1$. Estes resultados fornecem extensões vetoriais para alguns teoremas de Cambern de 1970.

Para um ordinal enumerável α , denotando por $C(\alpha)$ o espaço de Banach das funções contínuas no intervalo de ordinal $[1, \alpha]$, obtemos cotas superiores $H(n, k)$ e cotas inferiores $G(n, k)$ para as distâncias de Banach-Mazur entre os espaços $C(\omega)$ e $C(\omega^n k)$, $1 \leq n, k < \omega$, verificando $H(n, k) - G(n, k) < 2$. Estas estimativas fornecem uma resposta para uma questão de Bessaga e Pełczyński de 1960 sobre as distâncias de Banach-Mazur entre $C(\omega)$ e cada um dos espaços $C(\alpha)$, $\omega \leq \alpha < \omega^\omega$.

Palavras-chave: Espaços de Banach, Espaços de funções contínuas a valores vetoriais, Isomorfismos, Teorema de Banach-Stone, Distâncias de Banach-Mazur.

Abstract

For a locally compact Hausdorff space K and a Banach space X , we denote by $C_0(K, X)$ the space of X -valued continuous functions on K which vanish at infinity, endowed with the supremum norm. In the spirit of the classical 1937 Banach-Stone theorem, we prove that if $C_0(K_1, X)$ is isomorphic to $C_0(K_2, X)$, where X is a Banach space having finite cotype and such that X is separable or X^* has the Radon-Nikodým property, then either K_1 and K_2 are finite or K_1 and K_2 have the same cardinality. It is a vector-valued extension of a 1978 Cengiz result, the scalar case $X = \mathbb{R}$ or $X = \mathbb{C}$.

We also prove that if K_1 and K_2 are compact ordinal spaces and X is Banach space having finite cotype, then the existence of an isomorphism T from $C(K_1, X)$ onto $C(K_2, X)$ with $\|T\|\|T^{-1}\| < 3$ implies that some finite topological sum of K_1 is homeomorphic to some finite topological sum of K_2 . Moreover, if X^n contains no subspace isomorphic to X^{n+1} for every $n \in \mathbb{N}$, then K_1 is homeomorphic to K_2 . In other words, we obtain a vector-valued Banach-Stone theorem which is an extension of a 1970 Gordon theorem and at same time an improvement of a 1988 Behrends and Cambern theorem. We show that if there is an embedding T of a $C(K_1)$ into $C(K_2, X)$ with $\|T\|\|T^{-1}\| < 3$, then the cardinality of the α -th derivative of K_2 is either finite or greater than the cardinality of the α -th derivative of K_1 , for every ordinal α .

Next, let n be a positive integer, Γ an infinite set with the discrete topology and X is a Banach space having finite cotype. We prove that if the n -th derivative of K is not empty, then the Banach Mazur distance between $C_0(K, X)$ and $C_0(\Gamma, X)$ is greater than or equal to $2n + 1$. Thus, we also show that for every positive integers n and k , the Banach Mazur distance between $C([1, \omega^n k], X)$ and $C_0(\mathbb{N}, X)$ is exactly $2n + 1$. These results provide vector-valued versions of some 1970 Cambern theorems.

For a countable ordinal α , writing $C(\alpha)$ for the Banach space of continuous functions on the interval of ordinal $[1, \alpha]$, we give lower bounds $H(n, k)$ and upper bounds $G(n, k)$ on the Banach-Mazur distances between $C(\omega)$ and $C(\omega^n k)$, $1 \leq n, k < \omega$, such that $H(n, k) - G(n, k) < 2$. These estimates provide an answer to a 1960 Bessaga and Pełczyński question on the Banach-Mazur distances between $C(\omega)$ and each of the $C(\alpha)$ spaces, $\omega \leq \alpha < \omega^\omega$.

Keywords: Banach spaces, Spaces of vector-valued continuous functions, Isomorphisms, Banach-Stone Theorem, Banach-Mazur distances.

Gracias por visitar este Libro Electrónico

Puedes leer la versión completa de este libro electrónico en diferentes formatos:

- HTML(Gratis / Disponible a todos los usuarios)
- PDF / TXT(Disponible a miembros V.I.P. Los miembros con una membresía básica pueden acceder hasta 5 libros electrónicos en formato PDF/TXT durante el mes.)
- Epub y Mobipocket (Exclusivos para miembros V.I.P.)

Para descargar este libro completo, tan solo seleccione el formato deseado, abajo:

