Topologia de singularidades e o estudo de seus invariantes.

Grazielle Feliciani Barbosa

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP
Data de Depósito: 17/03/2008
Assinatura:______________________

Topologia de singularidades e o estudo de seus invariantes.[1]

Grazielle Feliciani Barbosa

Orientador: ***Prof. Dr. Marcelo José Saia***

Co-Orientador: ***Prof. Dr. Joachim Herbert Rieger***

Tese apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutora em Ciências - Área: Matemática.

USP - São Carlos
Março/2008

[1]Este trabalho teve suporte financeiro da Capes

Ao Mauricio com
imenso amor ...

Agradecimentos

A Deus, meu eterno companheiro, que esteve ao meu lado em todos os momentos.

Agradeço aos professores Marcelo José Saia e Joachim Herbert Rieger pela orientação, pela paciência, pela dedicação e, principalmente, pela amizade. Agradeço ao professor Joachim pela acolhida e atenção que me dedicou quando estive em Halle. Agradeço à professora Roberta pela dedicação, por ter ido comigo para Alemanha, por me ouvir e por acreditar em mim mesmo quando eu não acreditava. Você será sempre minha orientadora. Obrigada!

Agradeço aos meus pais, José Lourenço e Inês, por todo amor e carinho que me dedicam, por terem me ensinado o caminho a seguir e por acreditarem em mim. À minha irmã Giselle, agradeço pela amizade e compreensão. Agradeço à toda minha família, pelas orações que me dispensaram e por me amarem do jeito que eu sou. Amo vocês!

Ao meu namorado Mauricio, agradeço por estar sempre ao meu lado, com muita dedicação, carinho e amor. Te amo coração...

Agradeço a Deus todos os dias pelos amigos que me deu, não são muitos, nem poucos, mas são especiais para mim... e eu amo cada um de vocês.

A todos os professores que fizeram parte da minha vida acadêmica e sempre me incentivaram a prosseguir em meus estudos sem desistir de meus objetivos. Agradeço em especial à professora Maria Aparecida Soares Ruas.

Aos funcionários do ICMC por toda atenção dispensada e por serem pessoas tão gentis.

À Capes pelo suporte financeiro.

Enfim, a todos aqueles que colaboraram para a realização deste trabalho.

Muito Obrigada!

Resumo

Algumas relações entre $\mathcal{A}$-invariantes de germes de aplicações de coposto 1 equidimensionais $f : \mathbb{C}^n, 0 \to \mathbb{C}^n, 0$ são descritas. O principal resultado estabelece que a soma alternada de números de Milnor dos fechos dos conjuntos A_i na fonte de f é igual a multiplicidade local de f menos $n + 1$. E existem fórmulas correspondentes para os s-tipos estáveis locais $A_{(k_1,\ldots,k_s)}$. As relações nos garantem condições para a $\mathcal{A}$-finitude de f e para a $\mathcal{A}$-trivialidade topológica de deformações de f. Também classificamos os germes de aplicações $\mathcal{A}$-simples $f : \mathbb{C}^2, 0 \to \mathbb{C}^5, 0$, para multiplicidades 1, 2 e 3.

Abstract

Some new relations between $\mathcal{A}$-invariants of equidimensional corank-1 map-germs $f : \mathbb{C}^n, 0 \to \mathbb{C}^n, 0$ are described. The main local result states that the alternating sum of the Milnor numbers of the closures of the A_i sets in the source of f is equal to the local multiplicity of f minus $n + 1$. And there are corresponding formulas for the s-local stable types $A_{(k_1,\ldots,k_s)}$. The relations provide simplified (or weaker) conditions for the $\mathcal{A}$-finiteness of f and for the topological $\mathcal{A}$-triviality of deformations of f. We also classify the $\mathcal{A}$-simple germs $f : \mathbb{C}^2, 0 \to \mathbb{C}^5, 0$, for multiplicities 1, 2 and 3.

Sumário

Introdução

Uma questão relevante em teoria de singularidades é o estudo dos invariantes associados a um germe de aplicação. O primeiro invariante que surgiu foi o número de Milnor de um germe de uma função analítica $f : \mathbb{C}^n, 0 \to \mathbb{C}, 0$. Este invariante pode ser definido de várias maneiras. Algébricamente é definido por

$$\mu = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n}{\langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \rangle}$$

Sua finitude é uma condição necessária e suficiente para a determinação finita e, além disso, ele aparece associado à geometria da singularidade em duas formas: como números de pontos críticos de Morse em uma deformação estável e como o posto da homologia média da fibra de Milnor de f. Na teoria de singularidades de germes de aplicações $f : \mathbb{C}^n, 0 \to \mathbb{C}^p, 0$, com $p > 1$, não encontramos um invariante assim tão completo. Uma razão para isto está no fato de que, enquanto para funções aparece apenas um tipo de singularidade estável, ou seja, a singularidade de Morse, para $p > 1$ a complexidade da classificação dos germes e multigermes estáveis aumenta com n e p.

As singularidades de germes de aplicações do plano no plano foram primeiramente estudadas por H. Whitney, em 1955 e, posteriormente, por J. Mather. Os trabalhos de Whitney e Mather versam sobre singularidades estáveis. A classificação dos germes simples de coposto 1 (caso real ou complexo) foi obtida por J. H. Rieger em [25].

Quando um germe finitamente determinado não estável de $f : \mathbb{C}^2, 0 \to \mathbb{C}^2, 0$ é perturbado de modo a se tornar estável, um certo número de cúspides e dobras aparecem no discriminante, que é uma curva. Na tabela 1 em [25] alguns invariantes foram calculados para cada germe simples f, por exemplo, o número de cúspides $c(f)$, o número de dobras $d(f)$, a multiplicidade local $m_f(0)$ e o número de Milnor $\mu(\Sigma_f)$ do conjunto crítico. Também mostrou que alguns desses invariantes satisfazem certas relações, por exemplo, temos $c(f) = \mu(\Sigma_f) + m_f(0) - 2$. Gaffney e Mond mostraram em [11] que esta formula também vale para germes de coposto 2 (o que havia sido conjecturado por J. Rieger, baseado em seu trabalho com M.A.S. Ruas sobre a classificação de germes simples de coposto 2 no plano [29]).

Para germes quase-homogêneos equidimensionais de coposto 1, Marar, Montaldi e Ruas [22] apresentaram fórmulas para os invariantes 0-estáveis em termos dos pesos e grau de f. Mais geralmente, usando as equções que definem o fecho do conjunto dos pontos do tipo $A_{(k_1,\ldots,k_s)}$, podemos obter fórmulas para os invariantes 0-estáveis $r_{(k_1,\ldots,k_s)}(f)$, onde $\sum_i k_i = n$, de qualquer germe de coposto 1 equidimensional f, como em [26]. Fórmulas relacionando os invariantes 0-estáveis $r_{(k_1,..,k_s)}(f)$, a multiplicidade de f e certos números de Milnor generalizam, por exemplo, a fórmula $c(f) = \mu(\Sigma_f)+m_f(0)-2$ para $n = 2$ (provada para o caso semi- quase-homogêneo em [27].

Nos capítulos 2 a 4 desta tese (baseados em um trabalho em conjunto com Rieger, ver [3]) provamos essas fórmulas no caso geral (sem a hipótese de semi-quase-homogeneidade) e aplicamos estas à problemas de determinação finita e equisingularidade.

Também apresentamos neste trabalho a classificação de germes $\mathcal{A}$-simples $f : \mathbb{C}^2, 0 \to \mathbb{C}^5, 0$, para multiplicidades 1, 2 e 3, e uma conjectura de Rieger para generalizar essa classificação.

No capítulo 1 apresentamos algumas definições e resultados da Teoria de Singularidades que são de grande importância para o ínicio do trabalho

O objetivo do capítulo 2 é apresentar os invariantes v e r relacionados a um germe de aplicação equidimensional de coposto 1. Apresentamos também a fórmula de Lê-Greuel, de grande importância para obtenção dos resultados apresentados no capítulo 3, e demonstramos um lema sobre aditividade de codimensões.

No capítulo 3 apresentamos relações entre $\mathcal{A}$-invariantes de germes de aplicações de coposto 1 equidimensionais. O principal resultado estabelece que a soma alternada de números de Milnor dos fechos dos conjuntos A_i na fonte de f é igual a multiplicidade local de f menos $n + 1$. E existem fórmulas correspondentes para os s-tipos estáveis locais $A_{(k_1,\ldots,k_s)}$.

O capítulo 4 contém algumas extensões a germes $f : \mathbb{C}^n, 0 \to \mathbb{C}^p, 0$, $n > p$ e aplicações à determinação finita e equisingularidade.

No capítulo 5 classificamos os germes $\mathcal{A}$-simples $f : \mathbb{C}^2, 0 \to \mathbb{C}^5, 0$, para multiplicidades 1, 2 e 3, e apresentamos uma conjectura para generalizar essa classificação para o caso de germes $\mathcal{A}$-simples de $\mathbb{C}^2, 0$ em $\mathbb{C}^n, 0$, $n \geq 5$.